Pécsi Tudományegyetem
Pollack Mihály Főiskolai Kar
Gépészeti Intézet
Gépszerkezettan Tanszék

MŰSZAKI MECHANIKA PÉLDATÁR

2004.

ERFP-DD2002-HV-B-01 PROJECT 4. MODUL
Ipari hátterű alternáló képzés előkészítése a Gépészmérnöki Szakon

B E V E Z E T É S

A példatár a statika és a szilárdságtan témaköreiből több fejezetet tartalmaz, a kinematika és kinetika témakörből pedig egyet-egyet.

Az volt a cél, hogy a példatár a Gépszerkezettan Tanszék által oktatott műszaki mechanika, műszaki fizika és fizika tárgyakhoz egyaránt felhasználható legyen.

Mivel a fent felsorolt tárgyak már az első félévtől oktatásra kerülnek, ezért csak a középiskolás matematika tanulmányokra építhetünk. A tananyaghoz szükséges vektorszámítási alapokat a függelékben foglaltuk össze.

A példák megoldásánál nemcsak a végeredményeket közöljük, hanem - különösen nehezebb példáknál - sokszor a teljes számítást és szerkesztést is.

Nagyon fontos a példatár tanulmányozásánál, hogy a megoldást csak akkor nézzük meg, ha a feladatot megoldottuk.

Tehát ne azt ellenőrizzük magunkon, hogy a közölt megoldást értjük-e, hanem szerezzünk gyakorlatot a példák önálló megoldásában. A feladatok számszerű megoldásánál ma kizárólagosan mindenki zsebszámológépet használ, azonban ezek numerikus pontossága nagyobb a szükségesnél. Általában kimondható, hogy 0,2 %-nál nagyobb pontosságot a gyakorlati mérnöki problémáknál nem kívánunk meg.

A példatár második kiadását számítógéppel szerkesztettük és kibővítettük a megoldás részt is.

Reméljük, hogy a példatár hozzájárul a tananyag sikeres elsajátításához!

Szerzők:	**Dr. Orbán Ferenc**	**1.00-16.00 fejezet**
	Glöckler László	**17.00 fejezet**
	Regőczi Márta	**megoldások**

A kéziratot lektorálta: **Dr. Tímár Imre**

Kiadó: **Pécsi Tudományegyetem**
Pollack Mihály Műszaki
Főiskolai Kar
Pécs

A Mechanika Példatár a ERFP-DD2002-HU-B-01.sz
Phare pályázat alapján készült

TARTALOMJEGYZÉK

FELADATOK

1.00 SÍKBELI ERŐRENDSZEREK

1.1. Adott az x-y koordináta rendszerben $\overline{r_A}$ és $\overline{r_B}$ helyvektorok:

$\overline{r}_A = 4\overline{i} + 5\overline{j}\ m,\quad \overline{r}_B = 6\overline{i} + 8\overline{j}\ m$.

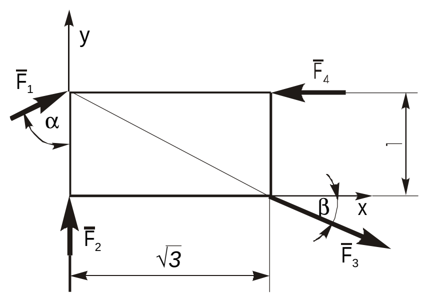
Határozza meg az A pontból B pontba mutató $\overline{r}_{AB}$ vektor kétszeresét!

1.2. A derékszögű lemez sarokpontjaiban az x-y síkban lévő $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ erők hatnak.

$\left|\overline{F}_1\right| = 400\ N,\quad \left|\overline{F}_2\right| = 600\ N,\quad \left|\overline{F}_3\right| = 200\ N,\quad \left|\overline{F}_4\right| = 400\ N$,

$a = 60^0, b = 30^0$

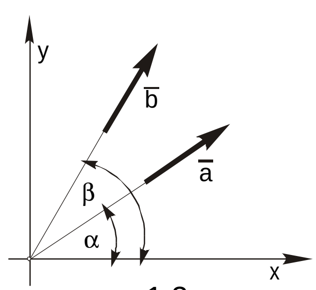
Számítsa ki a lemezre ható erők vektorális összegét és az erők <u>összegének abszolút értékét!</u>



1.2.

1.3. Ismeretes $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok nagyságát $\left|\overline{a}\right| = 4\ m,\quad \left|\overline{b}\right| = 6\ m\quad a = 30^0,\quad b = 45^0$.

Határozza meg a két vektor $\overline{a}+\overline{b}$ összegét, $\overline{a}-\overline{b}$ különbségét, $\overline{a}\cdot\overline{b}$ skaláris szorzatát és $\overline{a}x\overline{b}$ vektorális szorzatát !



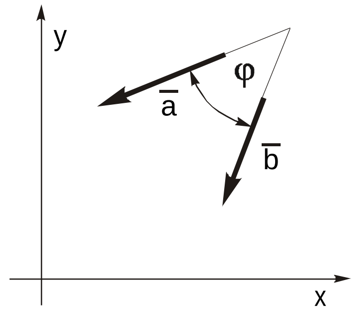
1.3.

1.4. Az x-y síkban lévő $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok abszolút értéke és egymással bezárt szöge adott:

$\left|\overline{a}\right| = 4\ m,\quad \left|\overline{b}\right| = 3\ m,\quad j = 60^0$.

Számítsa ki a két vektor $\overline{a}\cdot\overline{b}$ skaláris szorzatát és $\overline{a}x\overline{b}$ vektorális szorzatának abszolút értékét !

Ábra a következő oldalon.



1.4.

1.5. Adott az x - y koordináta-rendszerben $\bar{r}_A$ és $\bar{r}_B$ helyvektor:
$\bar{r}_A = 2\bar{i} + 1\bar{j}\ m, \quad \bar{r}_B = 6\bar{i} + 4\bar{j}\ m.$
Határozza meg az A pontból B pontba mutató egységvektort!

1.6. Az A ponton átmenő egyenes irányát $\bar{e}$ egységvektor jelöli ki.
$\bar{r}_A = 3\bar{i} + 5\bar{j}, \quad \bar{e} = 0{,}8\bar{i} + 0{,}6\bar{j}.$
Írja fel az egyenes egyenletét!

1.7. Ismert a B és C pontok koordinátája. B (5;2), C (1;7).
Határozza meg az $\bar{r}_{AB}$ és $\bar{r}_{AC}$ vektor által bezárt szöget, ha az A pont a koordináta-rendszer kezdőpontja!

1.8. Ismert az $\bar{a}$ vektor: $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}\ m$.
Határozza meg az $\bar{e}$ egységvektor által kijelölt egyenesre eső vetületét, ha
$\bar{e} = 0{,}92\bar{i} + 0{,}285\bar{j}$!

1.9. Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek merőlegesek egymásra:
a. $\bar{a} = 2{,}5\bar{i} + 6\bar{j},\quad \bar{b} = 12\bar{i} - 5\bar{j},$
b. $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j},\quad \bar{d} = 0{,}5\bar{i} + 2\bar{j}.$

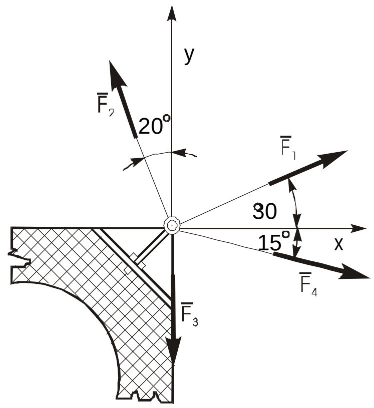
1.10. Számolja ki az A, B, C, Δ területét és az ABC síkra merőleges vektor értékét, ha az A pont a koodináta-rendszer kezdőpontja!
$\bar{r}_B = 3\bar{i} + 5\bar{j}\ m, \quad \bar{r}_C = 8\bar{i}\ m.$

1.11. Adott az $\bar{F}_0$ erőnek $\bar{F}_1$ és $\bar{F}_2$ komponense.
$\bar{F}_1 = 40\bar{i} + 50\bar{j}\quad kN,$
$\bar{F}_2 = -20\bar{i} + 4\bar{j}\quad kN.$
Számítsa ki az $\bar{F}_0$ erőt:
a.) $|\bar{F}_0|$ abszolút értékét,
b.) irányát kijelölő egységvektorát!

1.12. Az ábra szerinti 4 erő hat a szemescsavarra. Határozza meg az erők eredőjét a csavaron!

$\left|\overline{F}_1\right| = 150\ N,\quad \left|F_2\right| = 80\ N,\quad \left|\overline{F}_3\right| = 110\ N,\quad \left|\overline{F}_4\right| = 100\ N\,.$

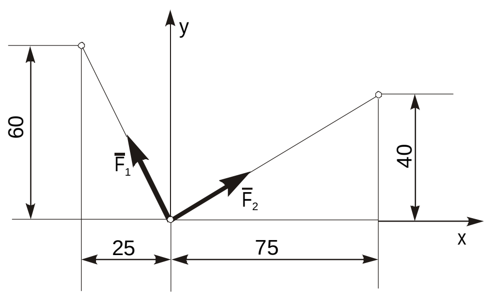
A feladatot oldja meg skalárisan és vektorosan is!



1.12.

1.13. Határozza meg az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők X és Y komponenseit!

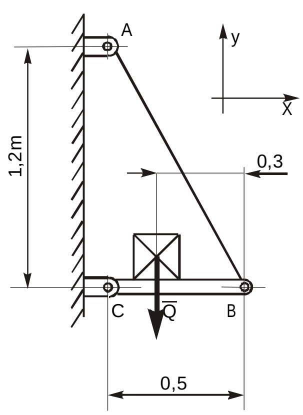
$\left|\overline{F}_1\right| = 1560\ N,\quad \left|\overline{F}_2\right| = 1360\ N\,.$



1.13.

1.14. Az AB huzalban ébredő erő 650 N.

Határozza meg az A csuklóban ébredő erő vízszintes és függőleges komponensét, valamint a C csuklóerőt és a Q erő nagyságát!

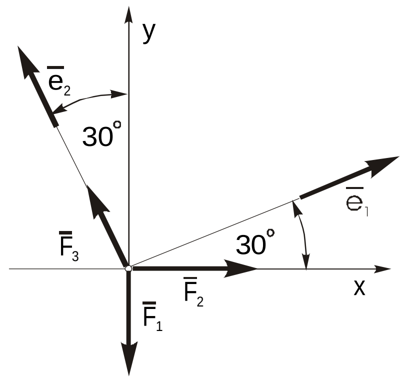


1.14.

1.15. Határozza meg az x-y koordináta-rendszer kezdőpontjában támadó erők eredőjének $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ egységvektorokkal kijelölt irányokba eső komponenseit!

$F_1 = 400\ N$, $F_2 = 100\ N$, $F_3 = 200\ N$,

$\bar{e}_1 = 0{,}866\bar{i} + 0{,}5\bar{j}$, $\bar{e}_2 = -0{,}5\bar{i} + 0{,}866\bar{j}$.



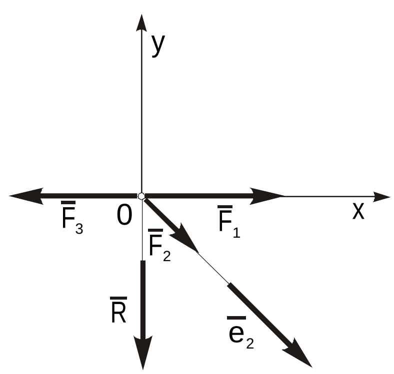
1.15.

1.16. Az alábbi vektor egyenletben ismert az $\bar{R}$, $\bar{F}_1$ és az $\bar{F}_2$ hatásvonalát kijelölő $\bar{e}_2$ egységvektor.

Határozza meg az $|\bar{F}_2|$ és $\bar{F}_3$ értékét!

$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$,

$|R| = 4\ kN$, $|\bar{F}_1| = 5\ kN$, $\bar{e}_2 = 0{,}6\bar{i} - 0{,}8\bar{j}$.

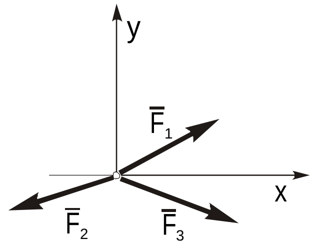


1.16.

1.17. Adott egy három erőből álló erőrendszer. Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét!

$\bar{F}_1 = 660\bar{i} + 540\bar{j}\ N$, $\bar{F}_2 = -520\bar{i} - 300\bar{j}\ N$, $\bar{F}_3 = 225\bar{i} - 400\bar{j}\ N$.

Ábra a következő oldalon.

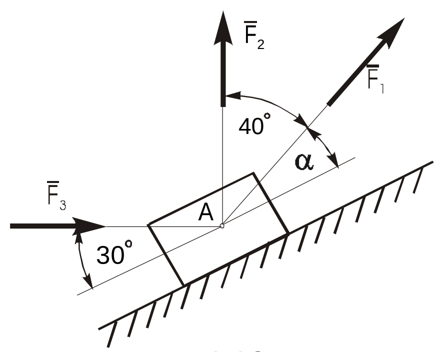


1.17.

1.18. F_1 és F_2 erők hatásvonalának lejtővel bezárt szöge ismeretlen. Az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erővektorok közti szög 40^o.

$\left|\overline{F}_1\right| = 300\ N$, $\left|\overline{F}_2\right| = 300\ N$, $\left|\overline{F}_3\right| = 500\ N$.

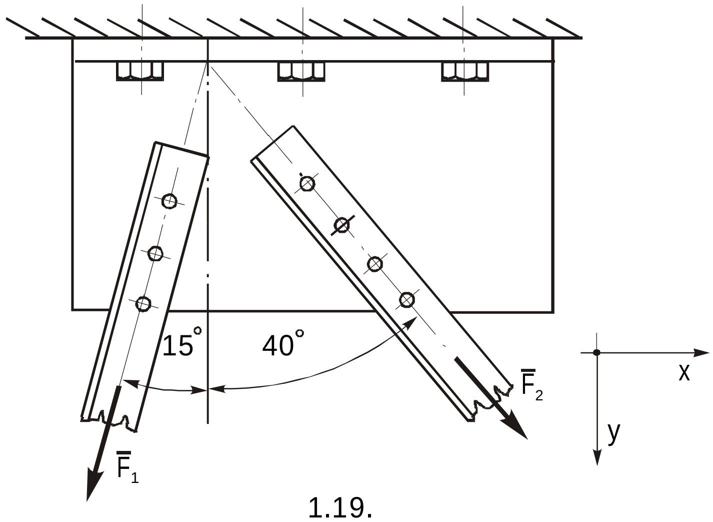
Határozza meg az erőrendszer azon eredőjéhez $\left(\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3\right)$ tartozó α szöget, amelynek hatásvonala párhuzamos a lejtővel!



1.18.

1.19. Az ábrán látható két szögvas elem egy csomólemezhez kapcsolódik. A szögvas elemeket terhelő erők $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$. határozza meg szerkesztéssel és számítással a csomólemezt terhelő eredő erőket.

$\left|\overline{F}_1\right| = 2500\ N$, $\left|F_2\right| = 2000\ N$.



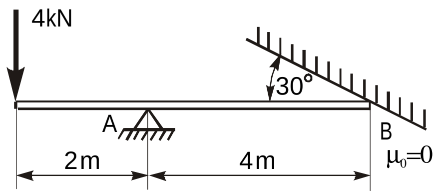
1.19.

1.20. Ismertek az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők, valamint az $\overline{F}_3$ erő iránya.

$\overline{F}_1 = 40\bar{i} + 18\bar{j}\ kN \quad \overline{F}_2 = -2\bar{i} + 2\bar{j}\ kN \quad \overline{F}_3 = F_3 \cdot \bar{j}$

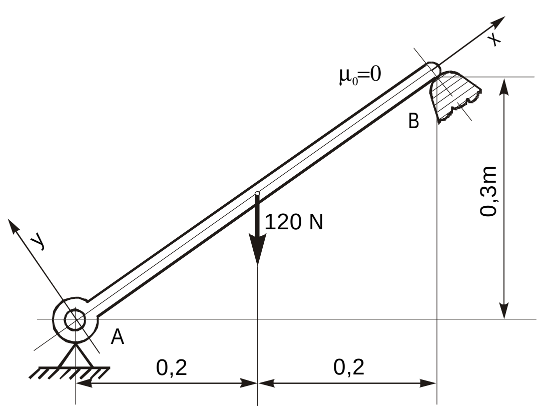
Határozza meg az $\overline{F}_3$ értékét úgy, hogy az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_3$ erők összege merőleges legyen $\overline{F}_2$ - re!

1.21. Határozza meg a reakcióerőket!



1.21.

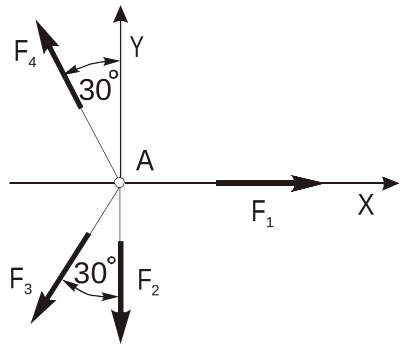
1.22. Határozza meg a reakcióerőket!



1.22.

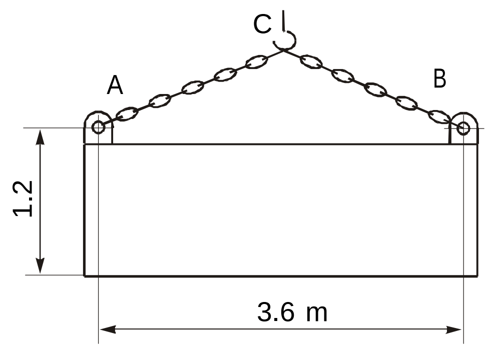
1.23. Az A pontszerű merev testre 4 erő hat. Határozza meg az eredőt!

$\left|\overline{F}_1\right| = 300\ N,\quad \left|\overline{F}_2\right| = 173{,}2\ N,\quad \left|\overline{F}_3\right| = 200\ N,\quad \left|\overline{F}_4\right| = 400\ N\ .$



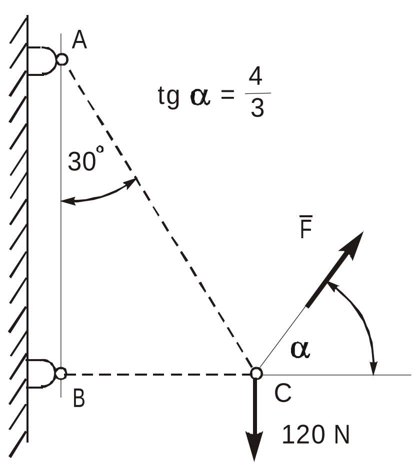
1.23.

1.24. Az ábrán látható teher súlya 1000 N. Határozza meg azon legrövidebb lánc-hosszat (ABC), amelyben emelésnél 1300 N erő ébred!



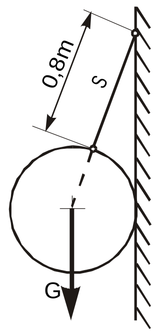
1.24.

1.25. Határozza meg az $\overline{\mathrm{F}}$ erő azon értékeit, amelynél mindkét kábel ($\overline{AB}$ és $\overline{BC}$) feszes marad!



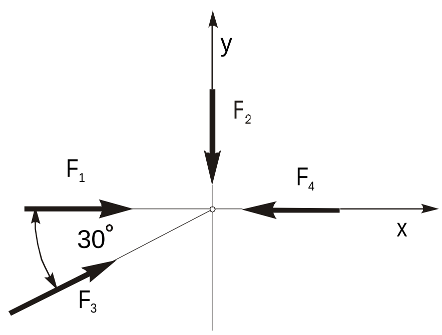
1.25.

1.26. m= 20 kg tömegű golyó (sugara R=0,5 m) függőleges falnak támaszkodva a felületén lévő ponthoz kötött S kötélen függ. Határozza meg a golyó nyugalmi helyzetét és a keletkező reakcióerőket! (g = 10 m/s^2)



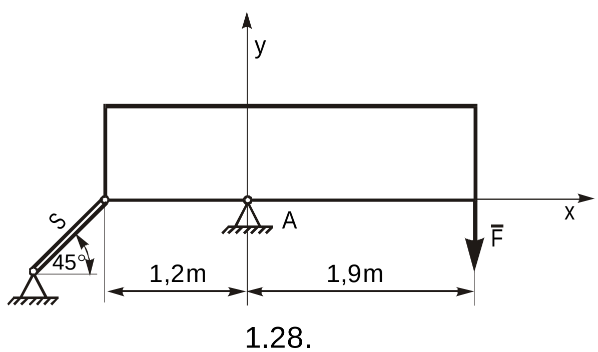
1.26.

1.27. Az ábrán látható 4 erőből álló erőrendszer egyensúlyban van. $\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{F}_4=\overline{0}$.
Határozza meg az F_3, F_4 erők abszolút értékét!
$\left|\overline{F}_1\right|=1{,}0\ kN,\quad \left|\overline{F}_2\right|=2\ kN$.



1.27.

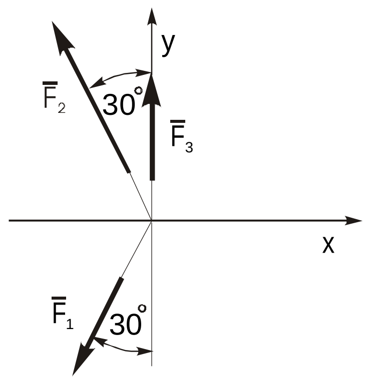
1.28. Határozza meg a reakcióerőket! F = 8 kN.



1.28.

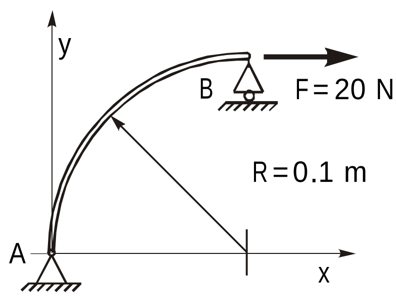
1.29. Határozza meg a $\overline{Q}$ egyensúlyozó erőt, ha igaz, hogy $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{Q} = \overline{0}$.

$\left|\overline{F}_1\right| = 500\ N$, $\left|\overline{F}_2\right| = 300\ N$, $\left|\overline{F}_3\right| = 573{,}2\ N$.



1.29.

1.30. Határozza meg a reakcióerőket!



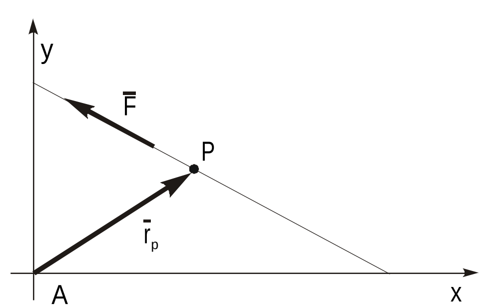
1.30.

1.31. A P pontban ható $\overline{F}$ erő hatásvonala x - y síkban esik.

$\overline{F} = -4\overline{i} + 2\overline{j}\ kN$, $\overline{r}_P = 4\overline{i} + \overline{j}\ m$.

Számítsa ki az $\overline{F}$ erő a.) A pontra vonatkozó $\overline{M}_A$ nyomatékát!

b.) A z tengelyre vonatkozó M_Z nyomatékát!



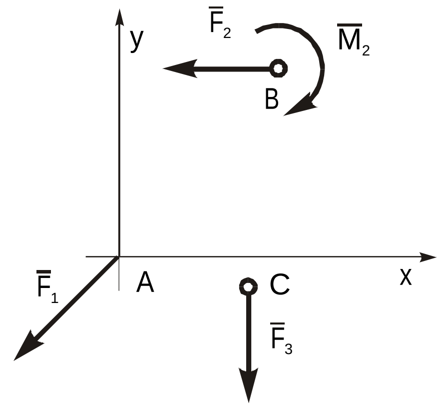
1.31.

1.32. Ismeretes a síkbeli erő-nyomaték rendszer.

$\overline{F}_1 = -8\overline{i} - 5\overline{j}\ kN$, $\overline{F_2} = -12i\ kN$, $\overline{F_3} = -20\overline{j}kN$,

$\overline{M}_2 = -12\ kNm, \quad B(4{,}6)m, \quad C(3,-1)m\ .$

Redukálja az erőrendszert az A és C pontra!

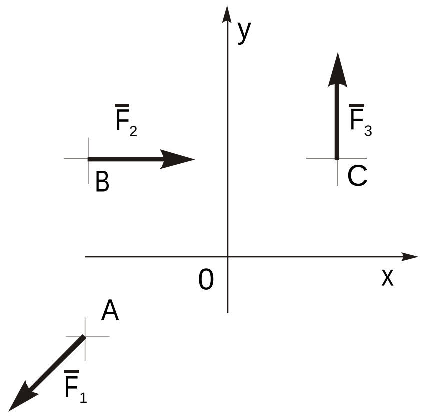


1.32.

1.33. Redukálja a síkbeli erőrendszert a 0 pontra, majd határozza meg az eredő erő hatásvonalának egyenletét (centrális egyenes)!

A (-4; -3) m, B (-4; 2) m, C (8; 4) m,

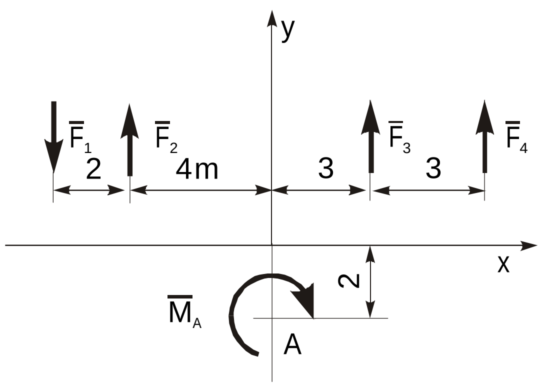
$\overline{F}_1 = -2\bar{i} - 2\bar{j}\ kN,\quad \overline{F}_2 = 3\bar{i}\ kN,\quad \overline{F}_3 = 4\bar{j}\ kN$.



1.33.

1.34. Ismert a párhuzamos erőrendszer A pontra számított nyomatéka, valamint $\overline{F}_1$,$\overline{F}_2$ és $\overline{F}_4$ erők. $\overline{M}_A = -14\bar{k}\ kNm$,

$\overline{F}_1 = -2\bar{j}\ kN,\quad \overline{F}_2 = 8\bar{j}\ kN,\quad \overline{F}_4 = 3\bar{j}k\ N$. Határozza meg az $|\overline{F}_3|$ erőt!



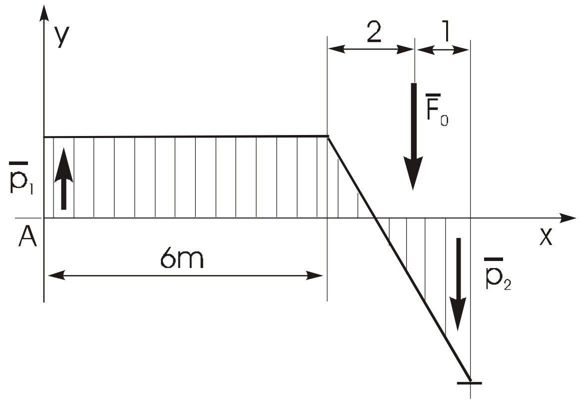
1.34.

1.35. Az x- y síkban fekvő erőrendszer a $\overline{p} = p(x)\overline{j}$ sűrűségű, x tengely mentén megoszló erőrendszerből és az $\overline{F}_O$ koncentrált erőből áll.

$p_1 = 3$ N/m, $p_2 = 6$ N/m, $F_o = -3$ N.

a.) Redukálja az erőrendszert az A pontra!

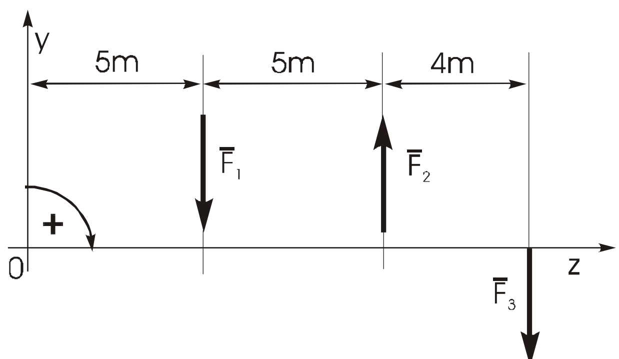
b.) Hol metszi a centrális egyenes az x tengelyt?



1.35.

1.36. Határozza meg a síkbeli párhuzamos erőrendszer O pontra redukált vektor-kettősét és a centrális egyenes tengellyel való metszéspontjának helyvektorát!

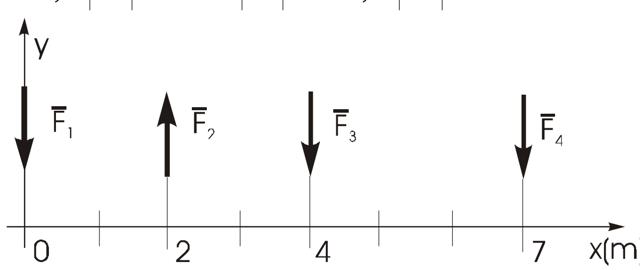
$$\overline{F}_1 = -4\overline{j}\ N, \quad \overline{F}_2 = 2\overline{j}\ , \quad N\overline{F}_3 = -2\overline{j}\ N\ .$$



1.36.

1.37. Határozza meg kötélsokszög szerkesztéssel a párhuzamos erőrendszer eredőjét!

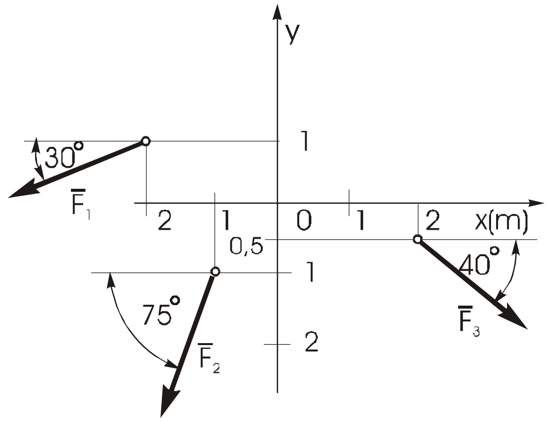
$$\left|\overline{F}_1\right| = 3\ N, \quad \left|\overline{F}_2\right| = 3\ N \quad \left|\overline{F}_3\right| = 1\ N, \quad \left|\overline{F}_2\right| = 1\ N\ .$$



1.37.

1.38. Határozza meg a síkbeli erőrendszer eredőjét szerkesztéssel és számítással. Redukálja az erőrendszert 0 pontra! Az ábra a túloldalon!

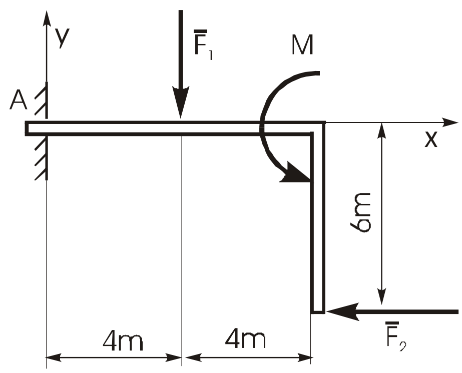
$$\left|\overline{F}_1\right| = 60\ kN\ , \quad \left|\overline{F}_2\right| = 38\ kN\ , \quad \left|\overline{F}_3\right| = 41\ kN\ .$$



1.38.

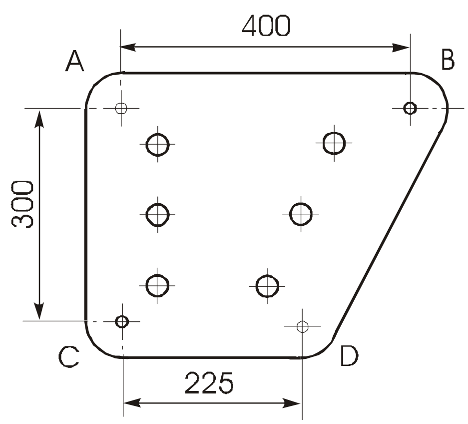
1.39. Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét és redukáljuk az A pontra!

$$|\overline{F}_1| = 12\ kN, \quad |\overline{F}_2| = 5\ kN, \quad |\overline{M}| = 8\ kNm.$$



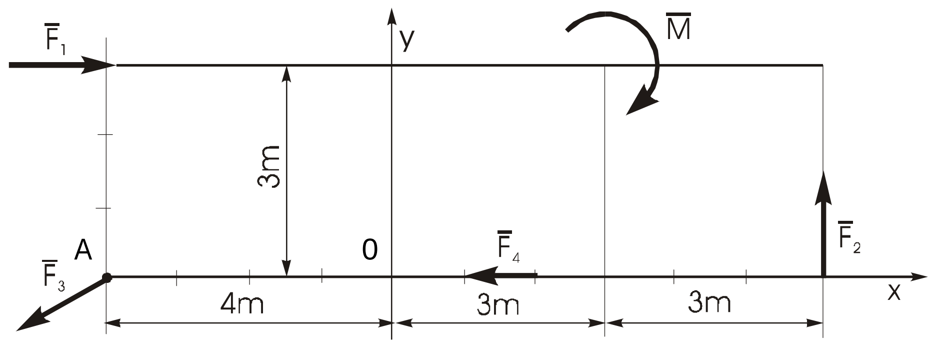
1.39.

1.40. Egy többorsós fúrógépen hat furat készül egyszerre. Mindegyik fúró 4 Nm nyomatékot fejt ki a lemezre. Mekkora minimális erőkkel tartható egyensúlyban a lemez az A és C, valamint az A és D pontokon?



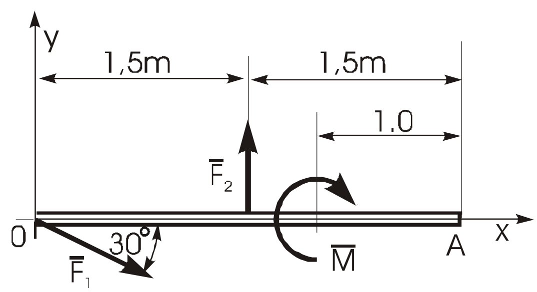
1.40.

1.41. Az ábrán vázolt síkbeli erőrendszer egyensúlyban van. Határozza meg az $\bar{F}_2$ és $\bar{F}_3$ erőket, ha $|\bar{F}_1| = 3\ kN$, $|\bar{F}_4| = 0{,}5\ kN$, $|\bar{M}| = 6\ kNm$!



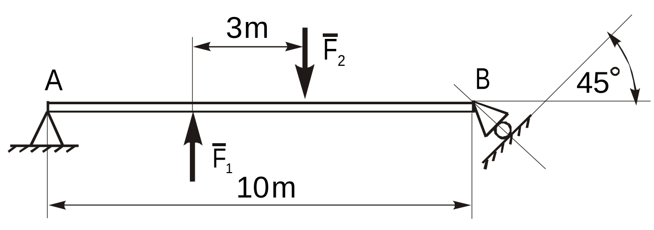
1.41.

1.42. Egyensúlyozza az ábrán vázolt erőrendszert az A pontban (erő + nyomaték) !
$|\bar{F}_1| = 60\ N$, $|\bar{F}_2| = 60\ N$ $|\bar{M}| = 15\ Nm$.



1.42.

1.43. Határozza meg a tartó támasztó erőit!
$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = 8\ kN$.

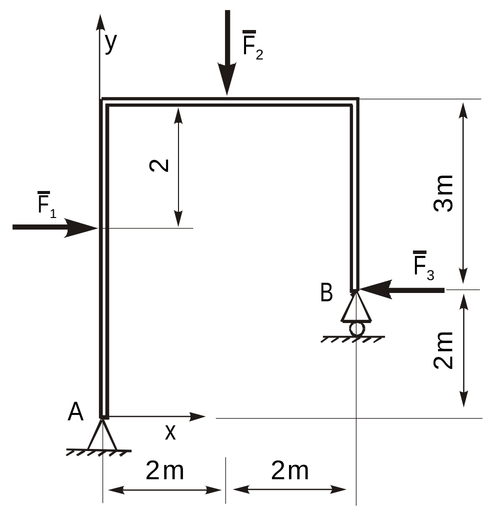


1.43.

1.44. Határozza meg a törtvonalú tartó támaszerőit!

$|\overline{F}_1| = 8\ kN,\quad |\overline{F}_2| = 6\ kN,\quad |\overline{F}_3| = 5\ kN\,.$

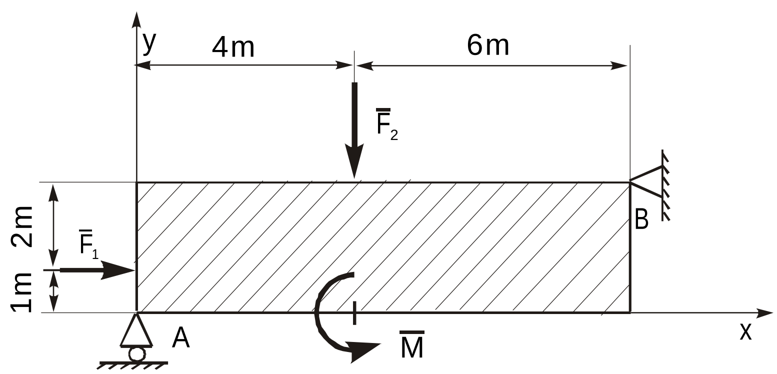
Az ábra a túloldalon!



1.44.

1.45. Határozza meg a merev test támaszerőit!

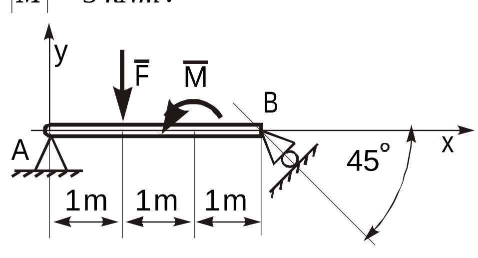
$|\overline{F}_1| = 3\ kN,\quad |\overline{F}_2| = 5\ kN,\quad |\overline{M}| = 6\ kNm\,.$



1.45.

1.46. Határozza meg a tartó támaszerőit!

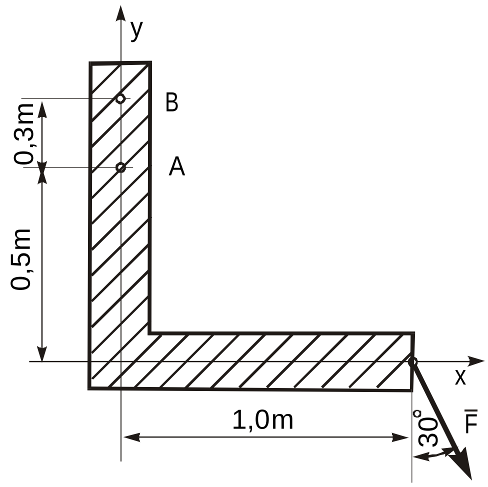
$|\overline{F}| = 6\ kN,\quad |\overline{M}| = 3\ kNm\,.$



1.46.

1.47. Egy merev testre egy ismert erő hat. Határozza meg azt az A pontban ható erő és nyomaték erőrendszert, amely az erővel egyenértékű!

$\left|\overline{F}\right| = 50\ N$.

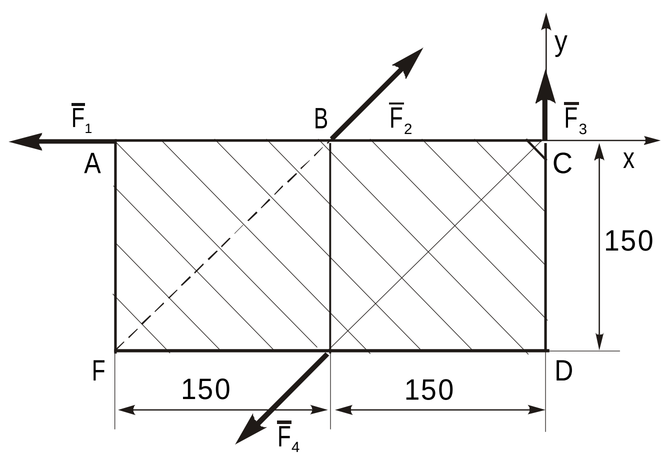


1.47-48.

1.48. Az előző feladat egyenértékű erőrendszerét úgy keressük meg, hogy a B pontnál $\left|\overline{F}_B\right| = 150 N$ erő működjön és az A pontnál is egy erő működjön.

1.49. Egy lemezszerű testre 4 erő hat. Határozza meg a lemez oldalait metsző egyensúlyozó erő nagyságát és helyét!

$\left|\overline{F}_1\right| = 200\ N,\quad \left|\overline{F}_2\right| = \left|\overline{F}_4\right| = 250\ N,\quad \left|\overline{F}_3\right| = 100\ N$.

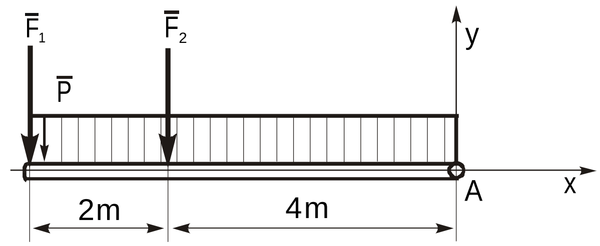


1.49.

1.50. Határozza meg az ábrán látható erőrendszer eredőjét és annak helyét, majd redukálja az A pontra !

$\left|\overline{F}_1\right| = 5\,kN,\quad \left|\overline{F}_2\right| = 3\,kN,\quad \left|\overline{p}\right| = 1\,kN/m$.

Az ábra a túloldalon!

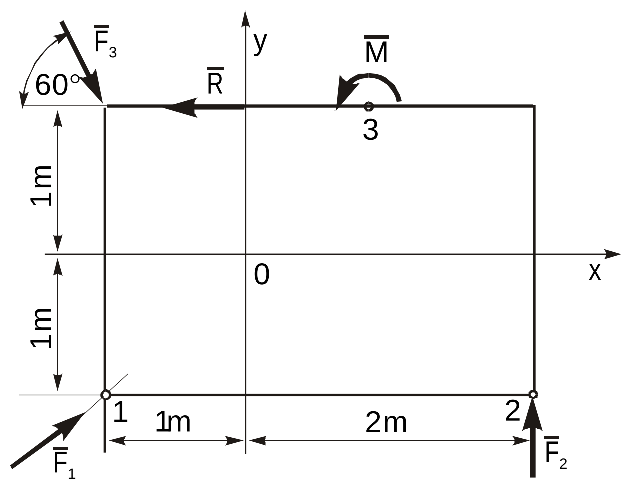


1.50.

1.51. Az $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ erők és az $\overline{M}$ nyomatékú erőpár eredője $\overline{R}$.

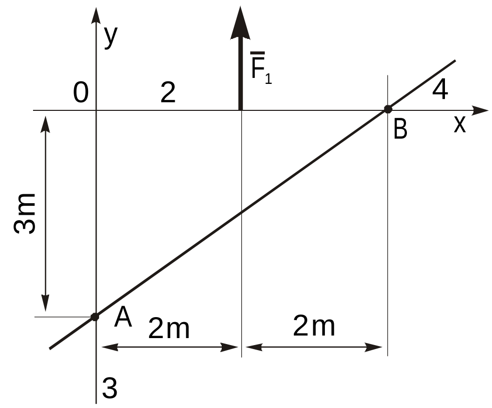
Határozza meg az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erőket !

$|\overline{F}_3| = 5\ kN, \quad |\overline{M}| = 3\ kNm, \quad |\overline{R}| = 2\ kN$.



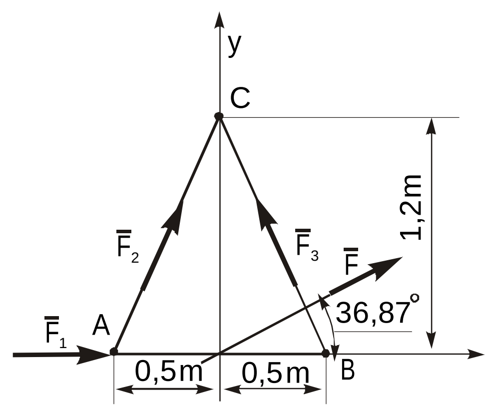
1.51.

1.52.1. Az $\overline{F}_1$ erő egyenértékű az ismert hatásvonalú $\overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ erőrendszerrel. Határozza meg az erők abszolút értékeit szerkesztéssel és számítással!
$\overline{F}_1 = 60\vec{j}\ N$.



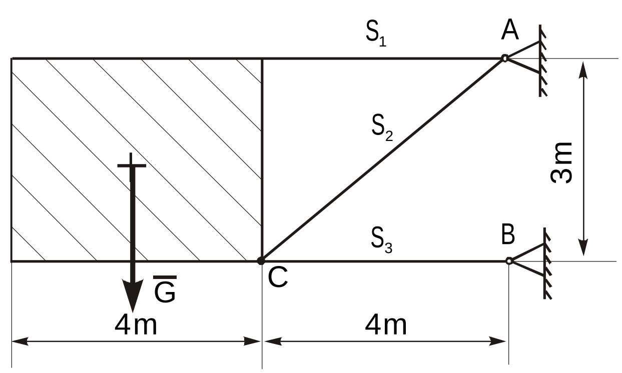
1.52.

1.53. Határozza meg az $\overline{F}$ erővel egyenértékű $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ erőrendszert szerkesztéssel és számítással! $|\overline{F}| = 5\ kN$.



1.53.

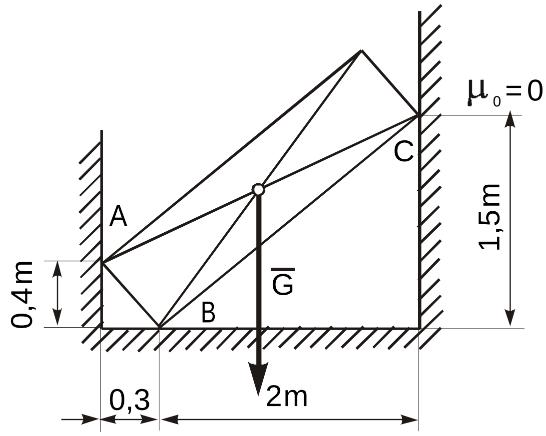
1.54. Határozza meg az egyensúlyban lévő szerkezet rúderőit!
$|\overline{G}| = 300\ N$.



1.54.

1.55. A G súlyú hasáb három csúcsán támaszkodik. Határozza meg a támaszerőket!

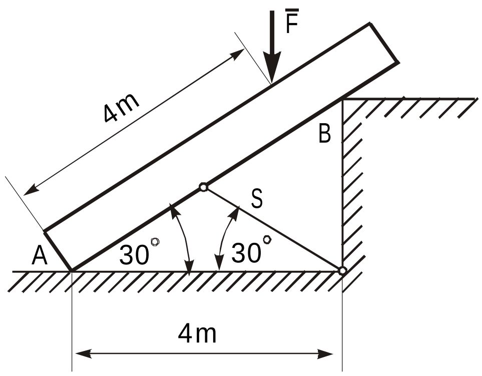
$|\overline{G}| = 100\ N$.



1.55.

1.56. Határozza meg a tartó egyensúlyát biztosító támaszerőket!

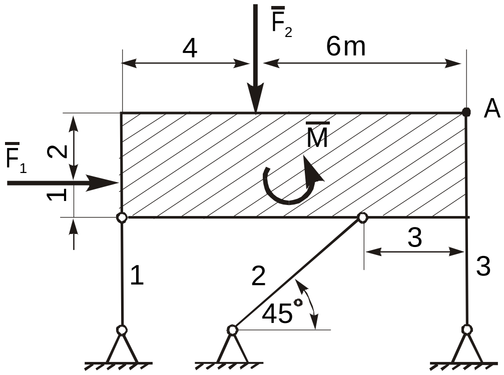
$\overline{F} = -1\overline{j}\ kN$ A tartó keresztmetszeti méretei elhanyagolhatók.



1.56.

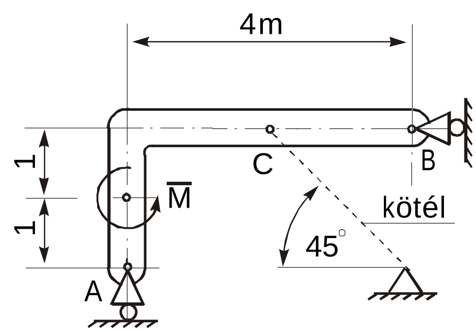
1.57. Határozza meg a merev test egyensúlyát biztosító támaszerőket!

$|\overline{F}_1| = 3\ kN$, $|\overline{F}_2| = 5\ kN$, $|\overline{M}| = 8\ kNm$.



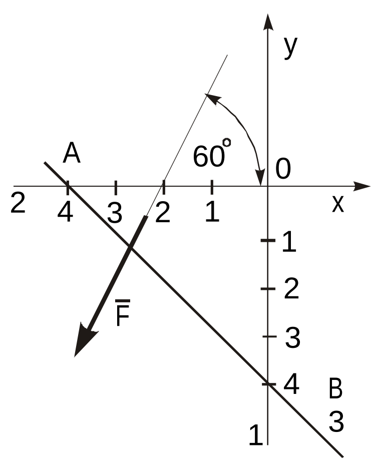
1.57.

1.58. A törtvonalú tartót egy $\overline{\mathrm{M}}$ nyomatékú erőpár terheli. Határozza meg a támaszerők értékét ! $\left|\overline{M}\right| = 5\ kNm$.



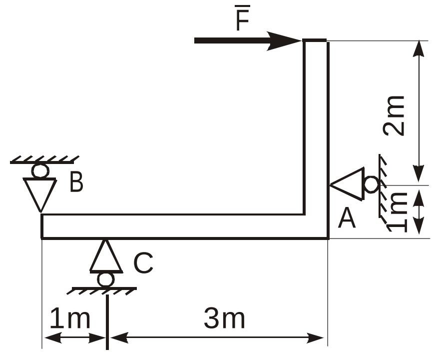
1.58.

1.59. Határozza meg az $\overline{\mathrm{F}}$ erővel egyenértékű $\overline{\mathrm{F}}_1, \overline{\mathrm{F}}_2, \overline{\mathrm{F}}_3$ erőrendszer erőinek abszolút értékét ! $\left|\overline{F}\right| = 400\ N$.



1.59.

1.60. Határozza meg a törtvonalú tartó támaszerőit! $|\bar{F}| = 6\ N$.



1.60.

2.00 KINEMATIKA

2.1. Egy tömegpont egyenesvonalú pályán mozog. Írja fel mozgástörvényét és v(t) sebességfüggvényét, ha a gyorsulás állandó; a = 4 m/s^2 ! A t = 0 időpillanatban s_o = 15 m és v_0 = 8 m/sec.

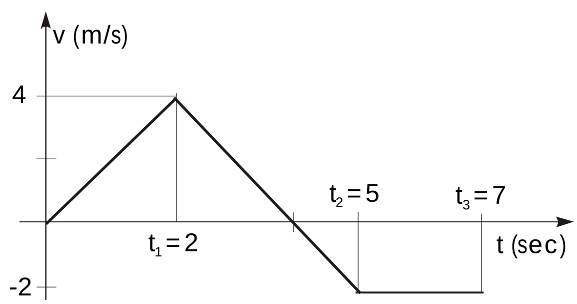
2.2. A tömegpont R = 1,5 m sugarú körpályán állandó pályasebességgel mozog. A szögsebesség ω= 0,6 1/sec. Számítsa ki a normális gyorsulást, a keringési időt, a fordulatszámot és a befutott körívet $\Delta t = 15$ sec múlva!

2.3. Egy tömegpontot v_0 = 200 km/óra sebességgel hajítunk el vízszintesen. Határozza meg a tömegpont sebességét az elhajítás után 10 sec-el ! Rajzolja meg a mozgás hodográfját! G=9,81 m/s^2.

2.4. Egy tömegpont a [0; t_1] időszakban a = 1 m/s^2 gyorsulással indul és 20 m/s sebességet ér el. A [t_1 ; t_2] időszakban egyenletesen halad és az indulástól számítva 1000 m utat tesz meg. Határozza meg a t_1, t_2 időértékeket, a két időszakban megtett utat és rajzolja meg a foronómiai görbéket!

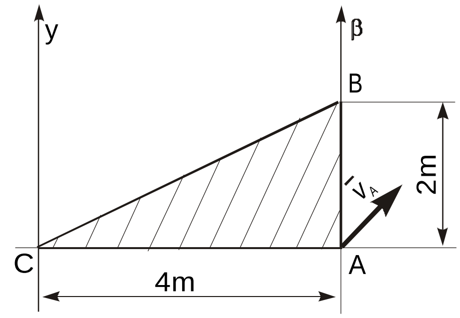
2.5. Egy tömegpontot $\bar{v}_0$ kezdősebességgel hajítunk el a földről. Határozza meg az emelkedés idejét és magasságát, valamint a földre érés távolságát !
$\bar{v}_0 = 23\bar{i} + 19{,}26\bar{j}\ m/s$, g=10 m/sec^2.

2.6. Egy tömegpont valamely tetszőleges pályán <0; t_3 > időintervallumban a megadott v(t) függvény szerint mozog. Rajzoljuk meg az a_t(t) pályagyorsulás és s(t) út függvényeket ! A kezdeti időpontban: s_0 = 0.



2.6.

2.7. Ismert az xy síkkal párhuzamos síkmozgást végző merev test A pontjának $\bar{v}_A$ sebessége, valamint a B pont sebességének β hatásvonala. (2.7. ábra a túloldalon!)
$\bar{v}_A = 4\bar{i} + 4\bar{j}\ m/s$.
Határozza meg szerkesztéssel
a.) a sebességpólust!
b.) B és C pontok $\bar{v}_B$ és $\bar{v}_C$ sebességét!
c.) a merev test v szögsebességét!



2.7.

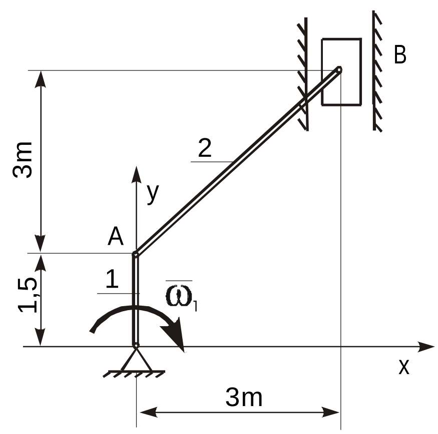
2.8. A forgattyús mechanizmus forgattyújának $v_1 = -2\overline{k}\,\frac{1}{s}$ a szögsebessége.

Határozza meg a vázolt helyzetben a 2 jelű rúd pillanatnyi

a.) P sebességpólusát, v_2 szögsebességét és B pontjának

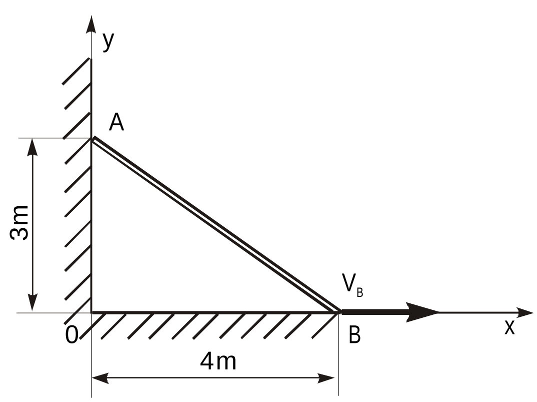
$\overline{v}_B$ = sebességét!

b.) ε_2 szöggyorsulását és B pontjának $\overline{a}_B$ gyorsulását!



2.8.

2.9. A falhoz támasztott, 5 m hosszú, létraszerű merev test B pontját $v_B = 0{,}6$ m/s állandó vízszintes sebességgel elcsúsztatjuk. Mekkora lesz az A pont sebessége 1,5 sec múlva?



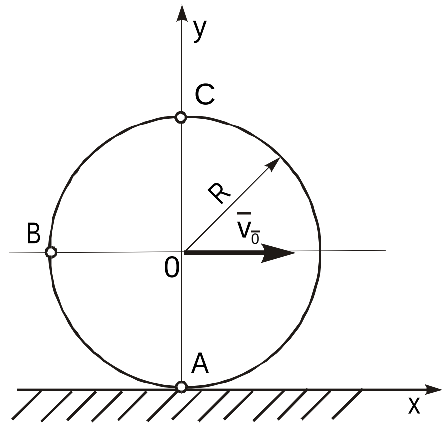
2.9.

2.10. Az R sugarú henger vízszintes talajon gördül. 0 pontjának $\bar{v}_0$ sebessége állandó. R = 4 m; v_0 = 20 m/s.

a.) Határozza meg a pillanatnyi sebességpólust!

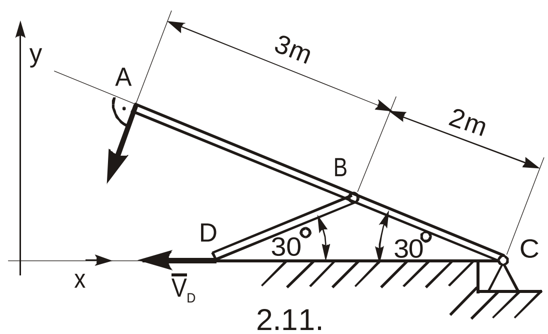
b.) Határozza meg a $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ és $\bar{v}_C$ sebességeket !

c.) Határozza meg az A, B, C pontok gyorsulását !



2.10.

2.11. Az ábrán vázolt A, B, C rúd és a D, B rúd csuklósan kapcsolódnak egymáshoz. A, C pontban csukló van, de a D pont a talajon elmozdulhat vízszintesen. A talaj felületét tökéletesen simának tételezhetjük fel. Ha $\bar{v}_D = -1{,}2\bar{i}$ m/sec, határozza meg a $\bar{v}_A$ sebességet !

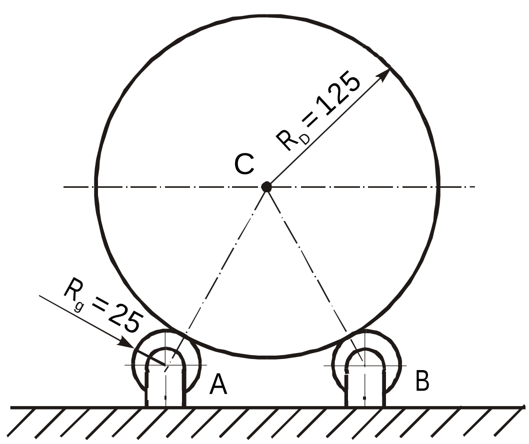


2.11.

2.12. Az ábrán látható keverő dob két görgőre támaszkodik. A dob miközben 12 fordulatot tesz meg, fordulatszáma egyenletesen nő 25 1/min-ról 45 1/min-ra *t* időintervallumban. Ha nincs csúszás a dob és görgők között, határozza meg:

a.) az időintervallumot és

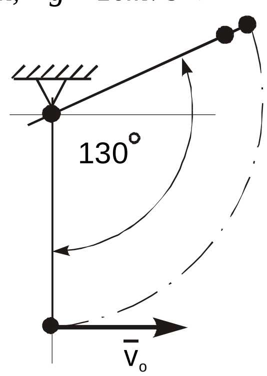
b.) a görgők szöggyorsulását!



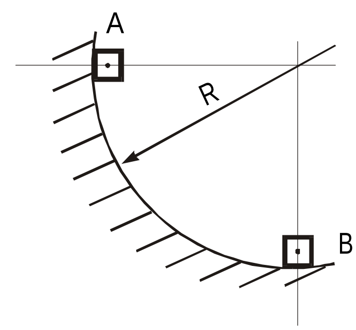
2.12.

3.00 KINETIKA

3.1. Az ábrán látható matematikai inga egy l hosszúságú súlytalannak tekinthető rúdból és m tömegű tömegpontból áll.. Határozza meg a mélypontban szükséges $\bar{v}_0$ sebességet, ha azt szeretnénk elérni, hogy az inga 130^0-os helyzetben feszültségmentes legyen.
$l = 1{,}2\ m; \quad g = 10 m/s^2$.



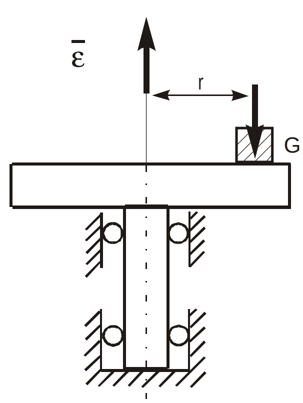
3.1.



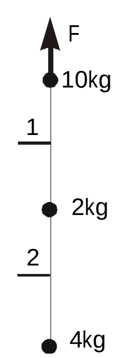
3.2.

3.2. R sugarú, sima körpályán m tömegű anyagi pont lecsúszik. Számítsa ki a legalsó pontban a pályanyomást és a tömegpont sebességét!
m = 2 kg; R = 1 m; g ≅ 10 m/sec$^{2.}$

3.3. Függőleges tengely körül csapágyazott vízszintes síkú tárcsán a forgástengelytől r = 0,5 m távolságra G = 30 N súlyú, pontszerűnek tekinthető test helyezkedik el. A test és a tárcsa közötti nyugvásbeli súrlódási tényező m_0 = 0,1. A tárcsa nyugalmi helyzetből indul és állandó $\bar{e}$ szöggyorsulással forog. Határozza meg, hogy az indulástól számítva hány másodperc múlva mozdul el a test a tárcsához viszonyítva!
$e = 0{,}5 \dfrac{1}{s^2}$.



3.3.



3.4.

3.4. Három tömegpontból álló rendszert súlytalan fonalak kötik össze. A rendszert F = 240 N erővel felhúzzuk. Határozza meg a kötélerőket!

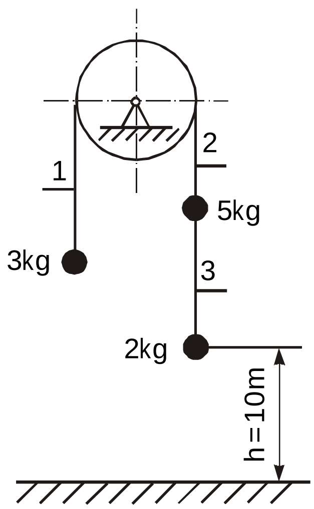
3.5. Az elhanyagolható tömegű, ideálisan sima csigára az ábra szerint három tömegpontnak tekinthető súlyt függesztünk.

Határozza meg:

a) a rendszer gyorsulását, ha $g=10\ m/s^2$,

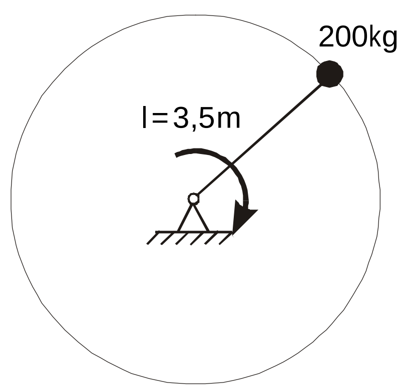
b) a fonalerőket,

c) Ha a 2 kg-os súly h = 10 m magasan van, mennyi idő alatt ér le?



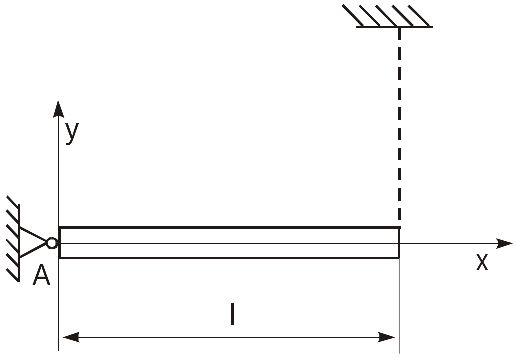
3.5.

3.6. Mekkora percenkénti fordulatszámmal lehet a drótkötél végére erősített 200 kg tömegű súlyt síkban forgatni, hogy drótkötél ne szakadjon el? A drótkötél szakítóereje: F = 150 kN.



3.6.

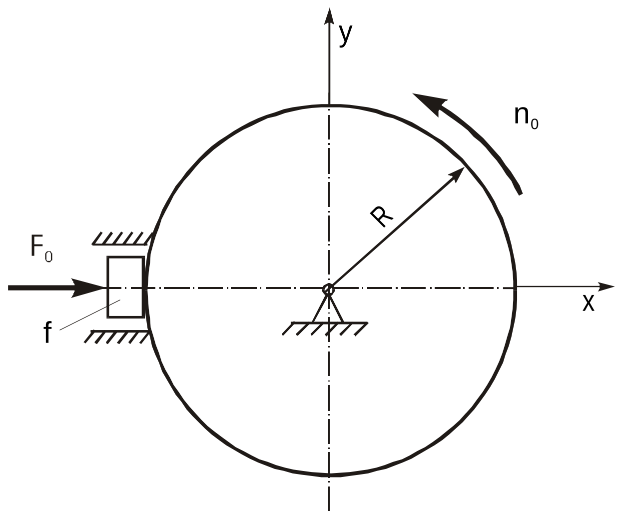
3.7. Az l hosszúságú, m tömegű homogén rúd az A pontban csuklóval, a másik végén függőleges fonállal rögzített. Ábra a túloldalon!



3.7.

Határozza meg az $\overline{F}_A$ erő értékét, ha a fonalat elégetjük.
m = 5 kg; g = 10 m/s^2,
l = 1,2 m.

3.8. A kezdetben n_0 percenkénti fordulatszámmal forgó, R sugarú tárcsát az f jelű féktuskó rászorításával akarjuk lefékezni. A tárcsa tehetetlenségi nyomatéka a z forgástengelyre J_z. A tárcsa és a féktuskó közötti μ súrlódási tényező megegyezik a mozgásbeli súrlódási tényezővel.



3.8.

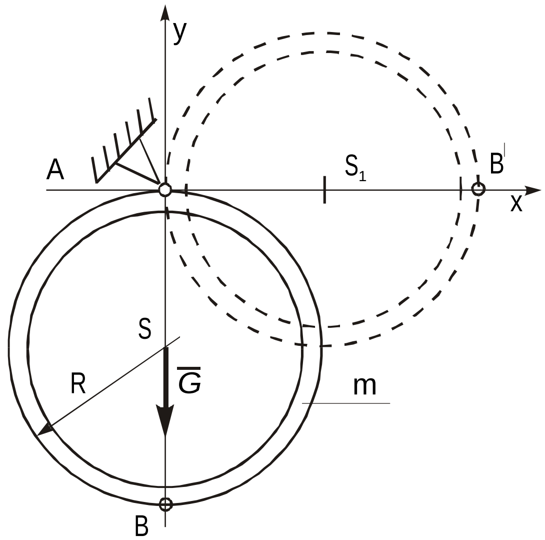
n_0 = 600 1/min; R = 0,2 m;
J_z = 1 kgm^2; μ = 0,2.

a) Hányat fordul a tárcsa megállásig, ha F_0 = 500 N ?

b) Mekkora F_0, erő esetén áll meg t = 15 sec alatt a tárcsa?

3.9. A z tengely körül forgó R sugarú, m tömegű vékony gyűrű legalsó kiinduló helyzetében a B pont $\overline{N}_{B0}$ sebessége ismert. A z tengellyel párhuzamos, S súlyponton átmenő tengelyre a másodrendű nyomaték $J_S \cong mR^2$;
R = 0,625 m;
m = 2 kg;
g $\cong$ 10 m/s^2; $\overline{N}_{B0}$ = 6,25 m/s.

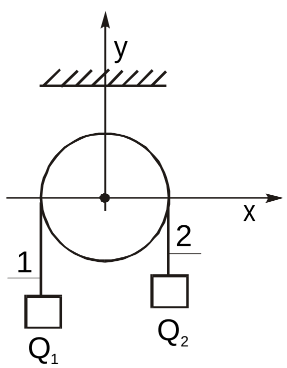
Ábra a túloldalon!



3.9.

Határozza meg a gyűrű induló és 90^o-kal elfordult helyzetében.
a) a B pont gyorsulását,
b) az $\overline{F}_A$ kényszererőt!

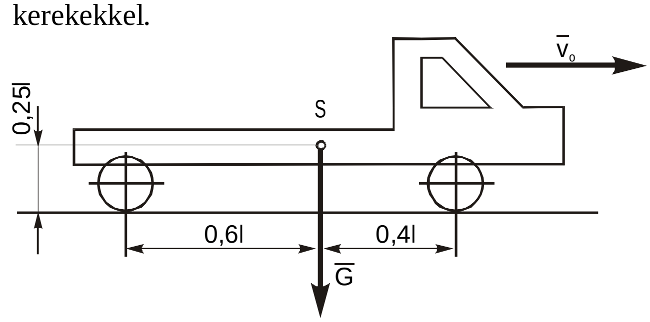
3.10.



3.10.

Az R sugarú J_z inercianyomaték csigán átvetett köteleken Q_1 és Q_2 súlyok függenek. A csiga tengelyén súrlódás nélkül forog.
Q_1=300 N, Q_2=100 N, R=0,5 m
J_z=1,25 kgm^2, g=10 m/s^2
a.) Mekkora a rendszer gyorsulása?
b.) Kötélágakban ébredő erők?

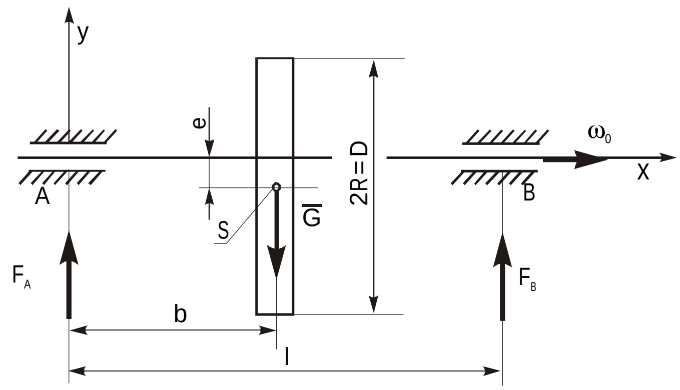
3.11. Adott v_0 kezdősebességű tehergépkocsi négy kerekét fékezzük, teljesen befékezett kerekekkel.



3.11.

Határozza meg :
a.) a fékezési időt,
b.) a fékutat!
c.) A fékezés közben hogyan változik a tengelynyomás?
l=3,2 m, G=65kN
μ=0,12
v_0=65km/h,
g=9,81 m/s^2

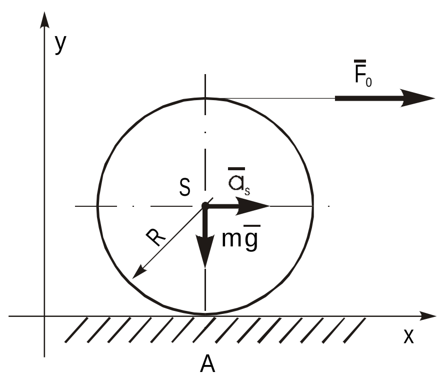
3.12. A D átmérőjű $\overline{G}$ súlyú excentrikusan felékelt tárcsa állandó ω_0 szögsebességgel forog.
R=0,2 m, G=3 kN, e=2 mm, ω_0 = 50 1/s, b=0,4 m, l=0,6 m, g=10 m/s^2.



3.12.

Számítsa ki, hogy a forgás közben a [F_B] értéke milyen határok között változik!
Az ellenállásokat hanyagoljuk el!

3.13.



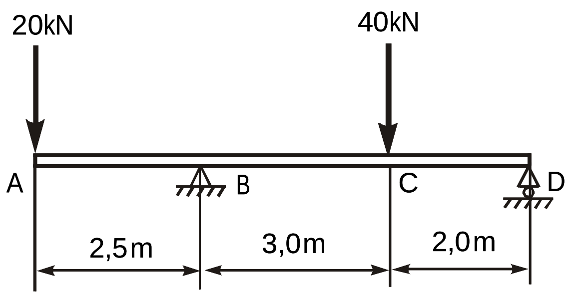
3.13.

A R sugarú, m tömegű homogén körhenger vízszintes érdes pályán gördül.
R=0,1 m; m=30 kg; g=10 m/s^2;
$\overline{a}_S = 8\overline{i}\ m/s^2$.

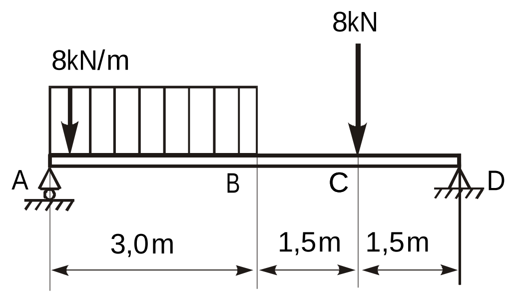
a.) Mekkora F_0 erő hat a hengerre tekert fonál végére?
b.) Számítsa ki az $\overline{F}_A$ kényszererőt!
c.) Mekkora a gördüléshez szükséges nyugvásbeli súrlódási tényező?

4.00 KÉTTÁMASZÚ TARTÓK IGÉNYBEVÉTELE

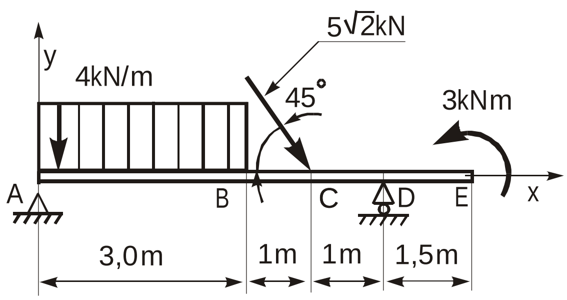
A feladatokban határozza meg a támaszerőket és az igénybevételi ábrákat!



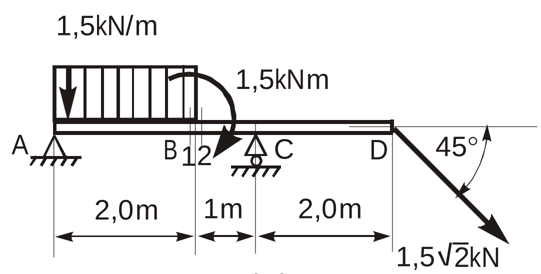
4.1.



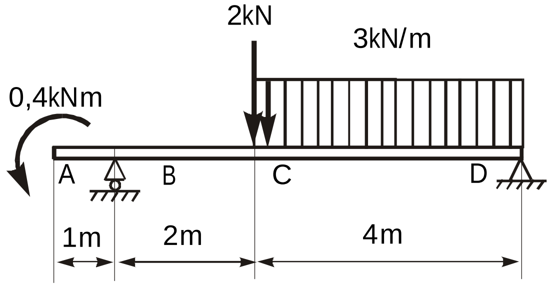
4.2.



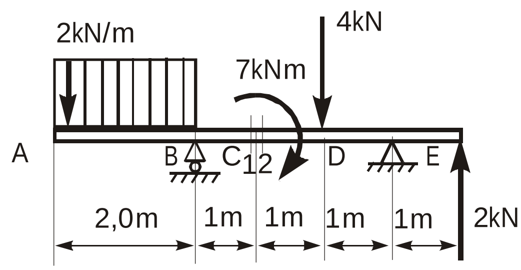
4.3.



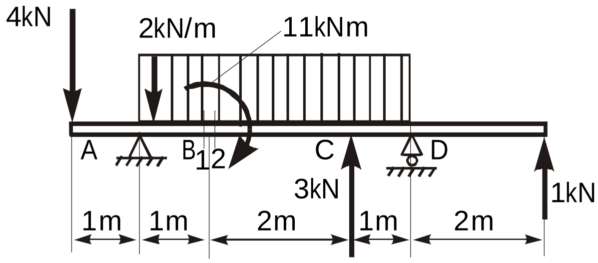
4.4.



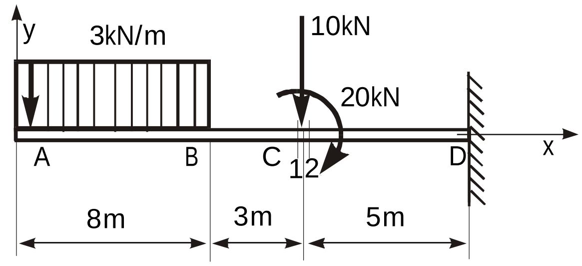
4.5.



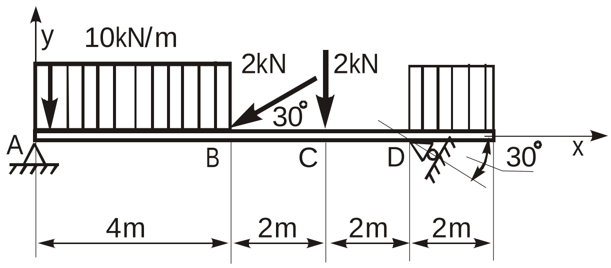
4.6.



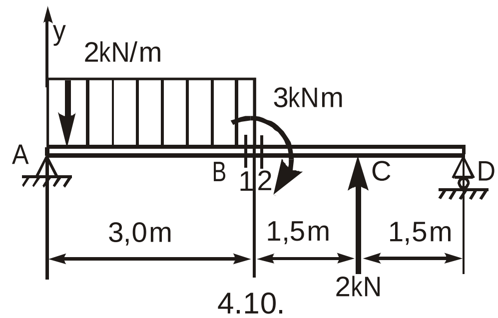
4.7.



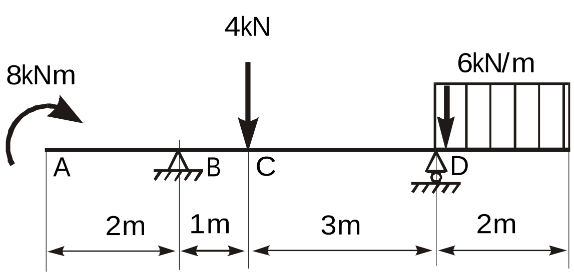
4.8.



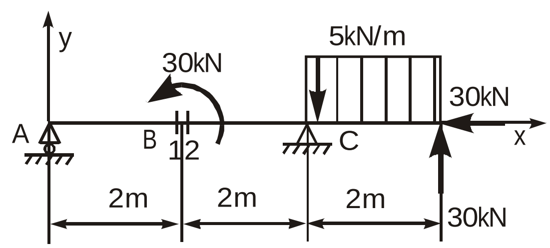
4.9.



4.10.



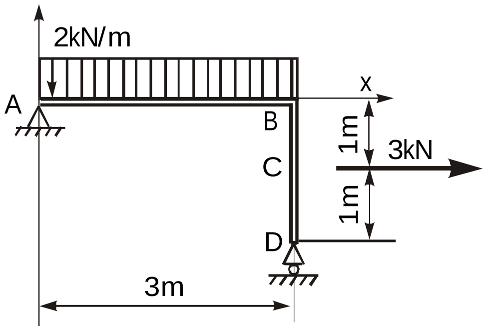
4.11.



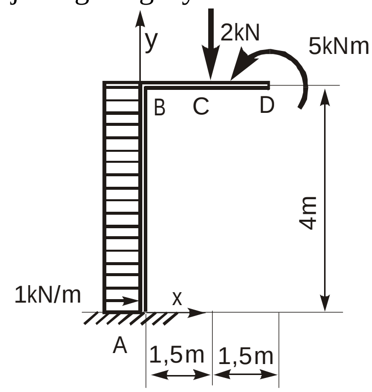
4.12.

5.00 TÖRTVONALÚ TARTÓK

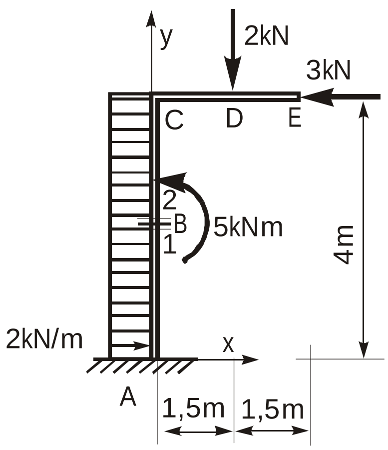
Határozza meg a tartók támaszerőit és rajzolja meg az igénybevételi ábrákat!



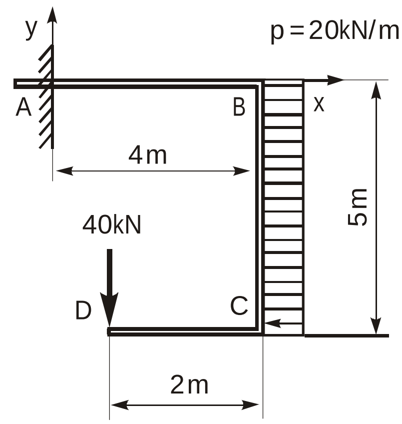
5.1.



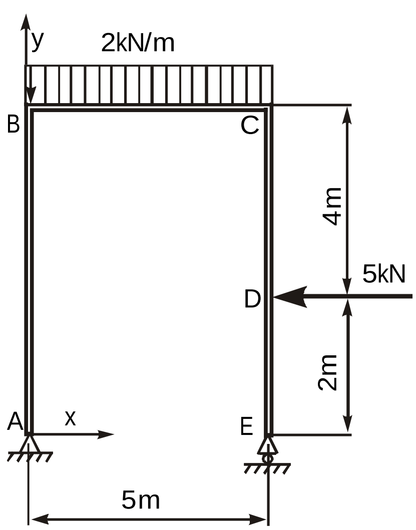
5.2.



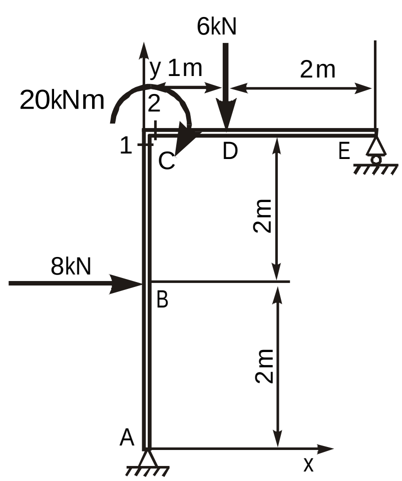
5.3.



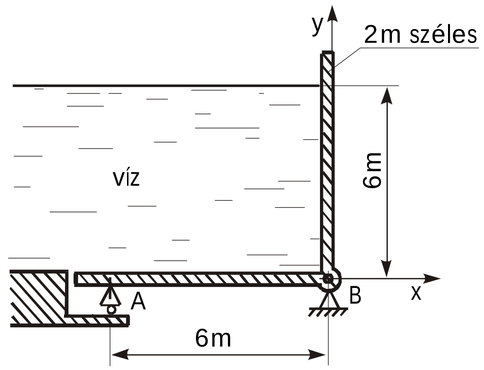
5.4.



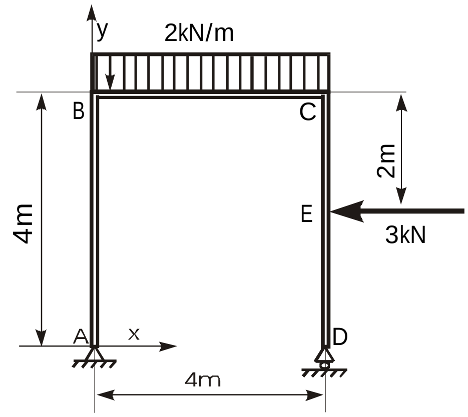
5.5.



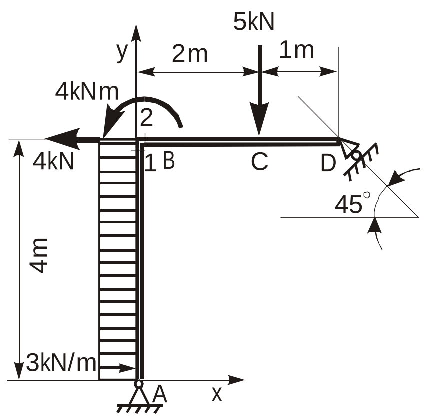
5.6.



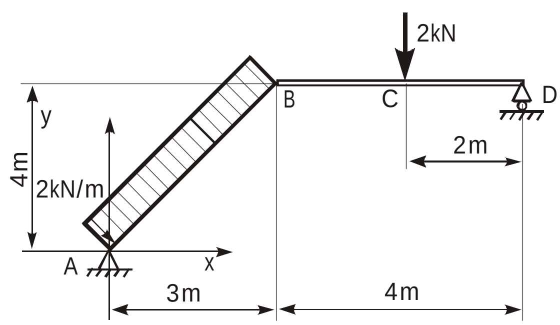
5.7.



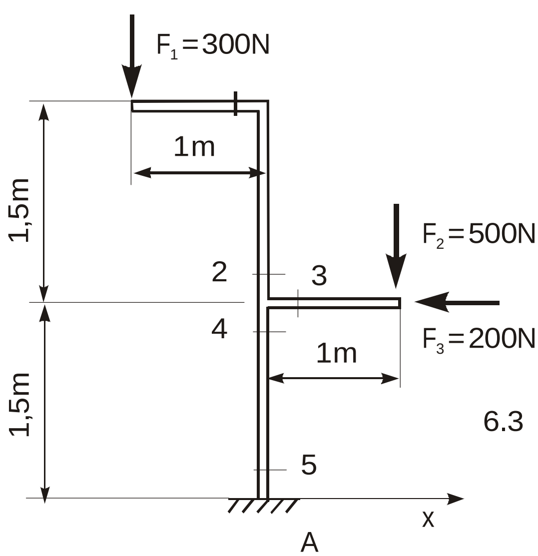
5.8.



5.9.



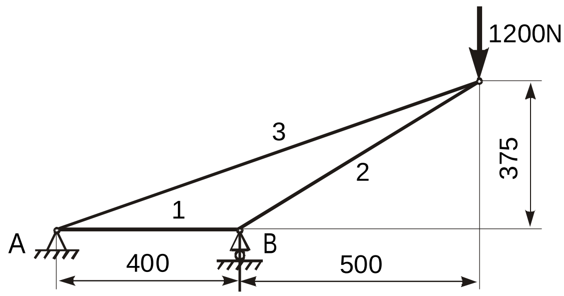
5.10.



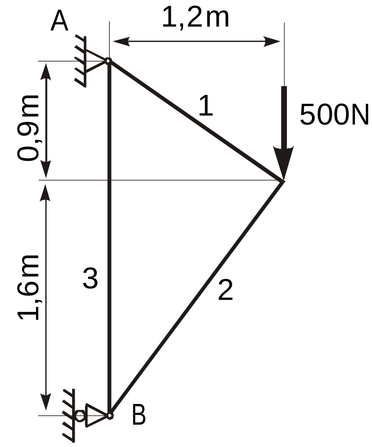
5.11.

6.00 SÍKBELI RÁCSOS TARTÓK

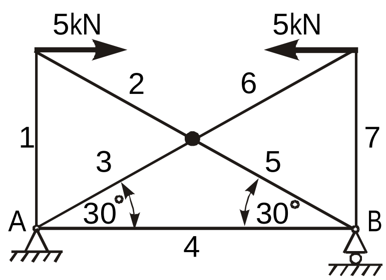
Határozza meg a rácsos tartók rúderőit!



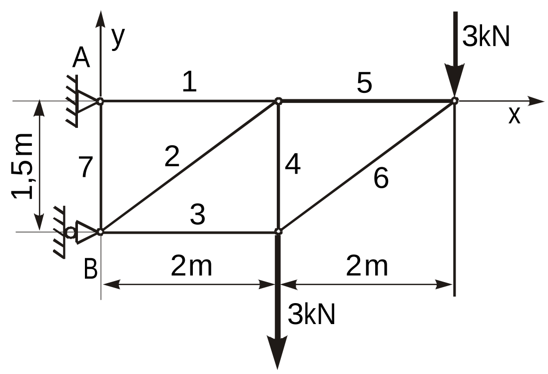
6.1.



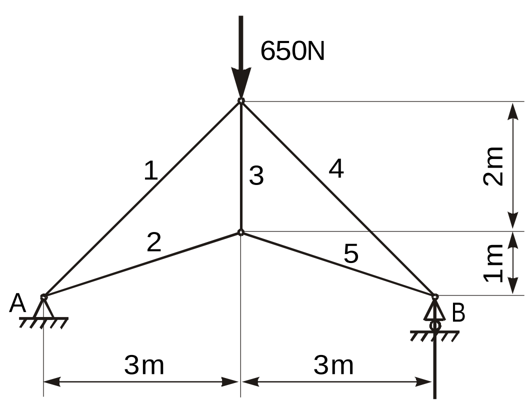
6.2.



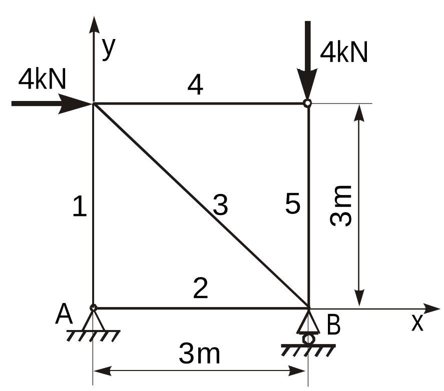
6.3.



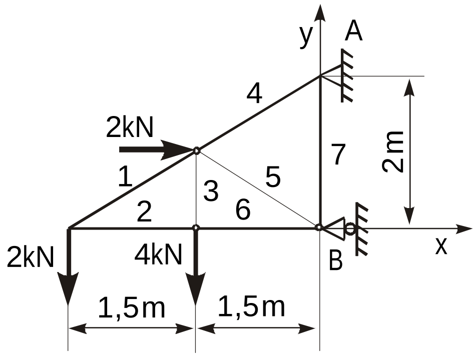
6.4.



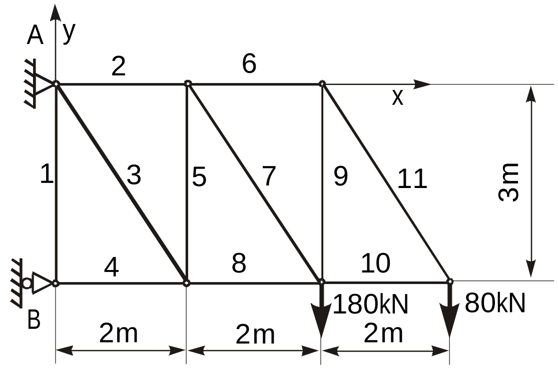
6.5.



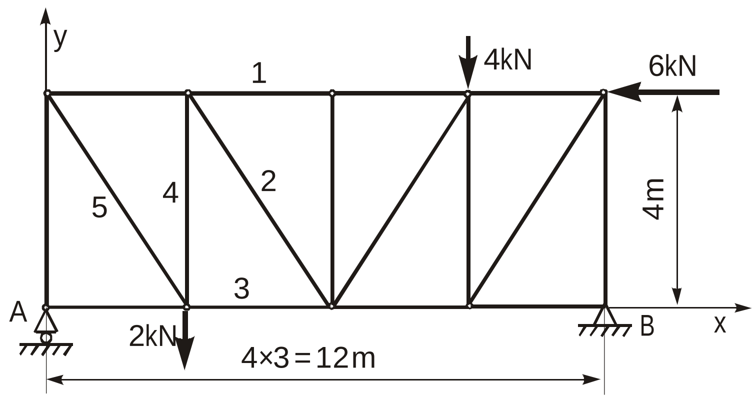
6.6.


y
A
4
2kN
1
3
5
7
2m
2
6
2kN
4kN
B
x
1,5m
1,5m

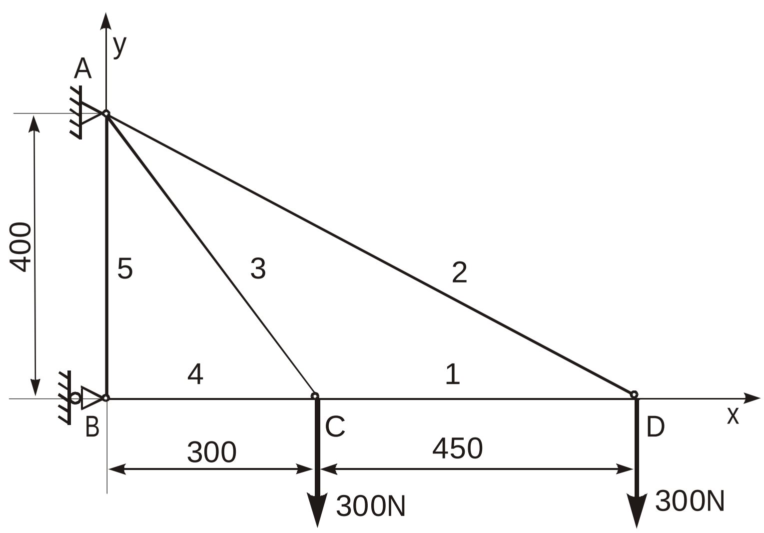
6.7.


A
y
2
6
x
1
3
5
7
9
11
3m
4
8
10
B
180kN
80kN
2m
2m
2m

6.8.


y
1
4kN
6kN
5
4
2
4m
3
A
2kN
B
x
4×3 = 12m

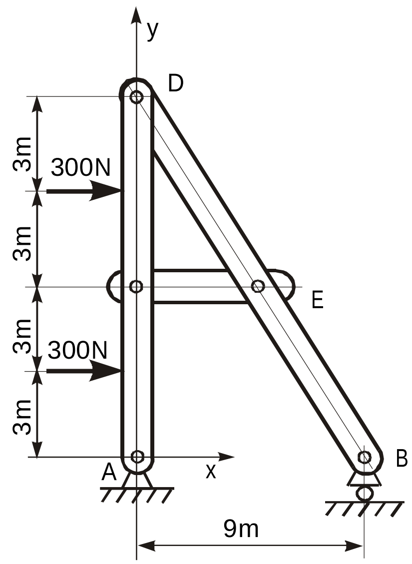
6.9.


y
A
400
5
3
2
4
1
B
C
D
x
300
450
300N
300N

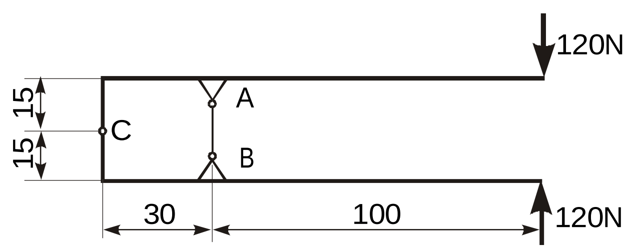
6.10.

7.00 SÍKBELI CSUKLÓS SZERKEZETEK

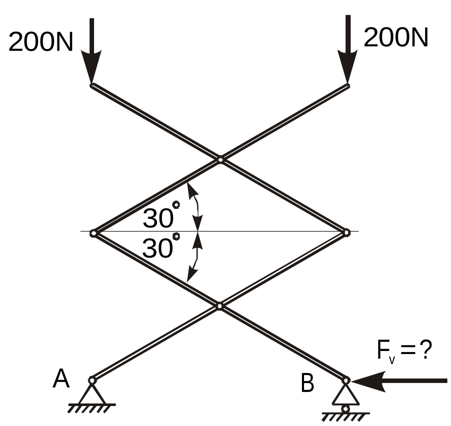
E feladatcsoporton belül az összetett szerkezet egyensúlyát biztosító külső erőket (reakció erők) kell meghatározni, valamint a belső (csukló, rúd) erőket.
A "tartóknál" az igénybevételi ábrákat is meg kell rajzolni.



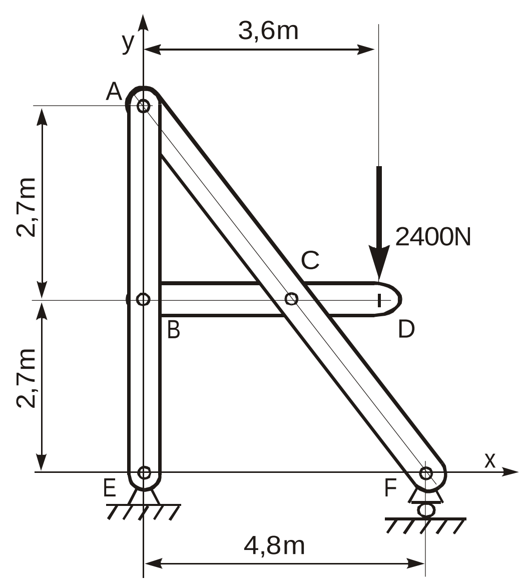
7.1.



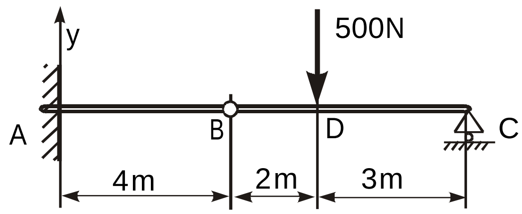
7.2.



7.3.

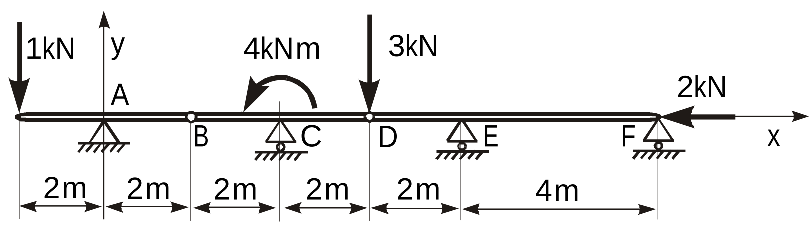


7.4.



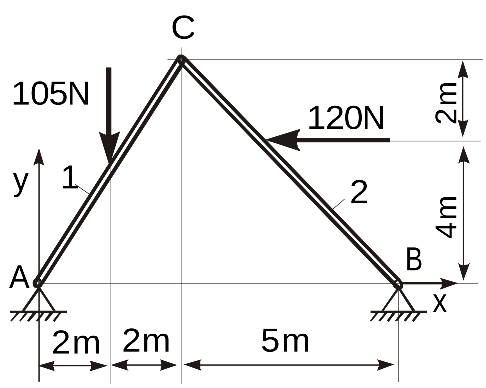
y
500N
A
B
D
C
4m
2m
3m

7.5.



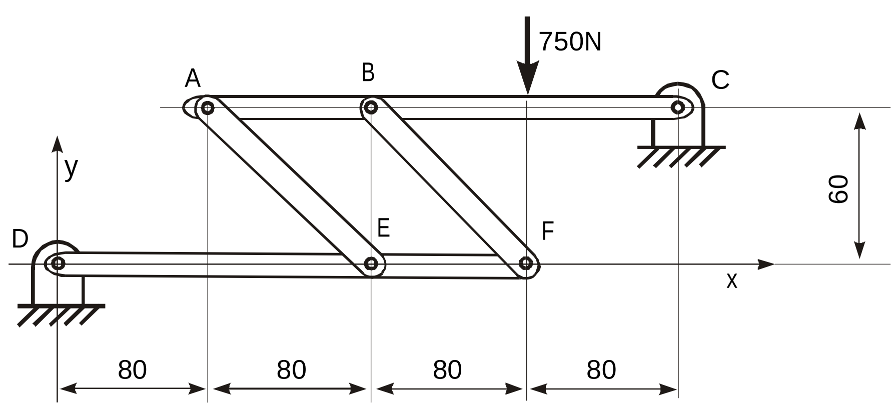
1kN
y
4kNm
3kN
A
2kN
B
C
D
E
F
x
2m
2m
2m
2m
2m
4m

7.6.



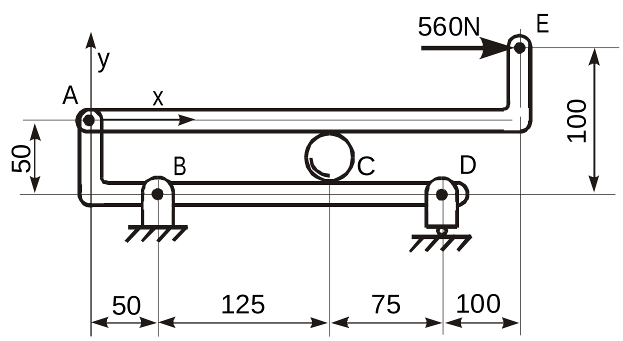
C
105N
120N
2m
y
1
2
4m
A
B
x
2m
2m
5m

7.7.

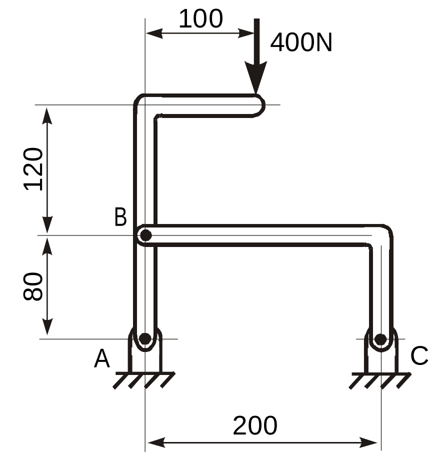


750N
A
B
C
y
60
D
E
F
x
80
80
80
80

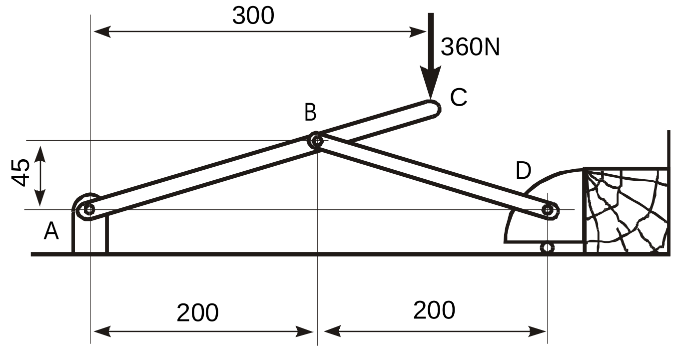
7.8.



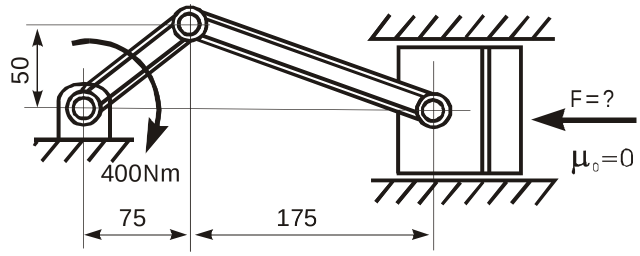
7.9.



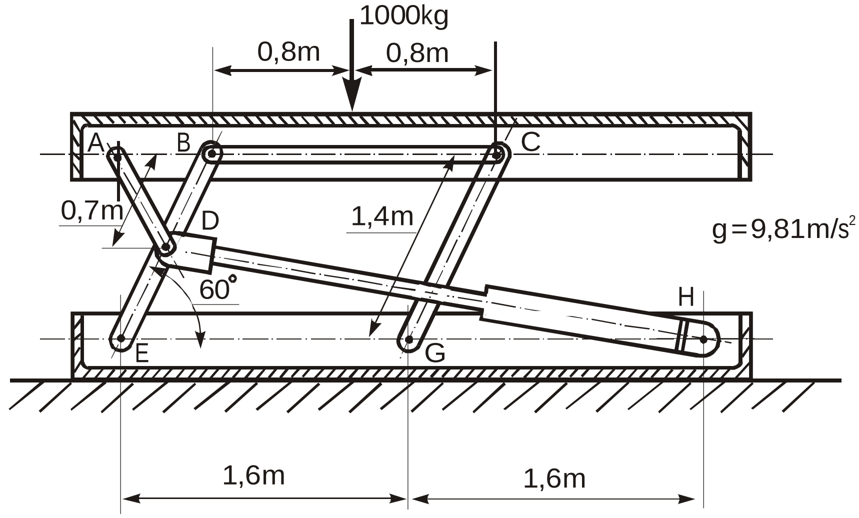
7.10.



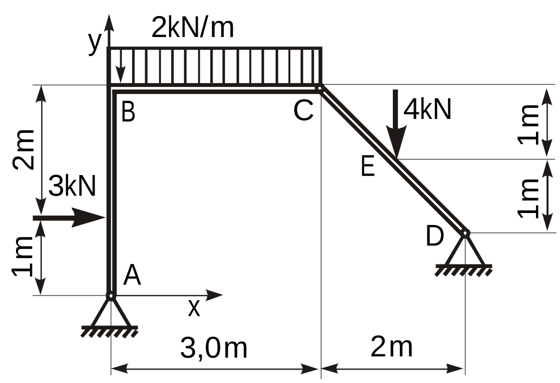
7.11.



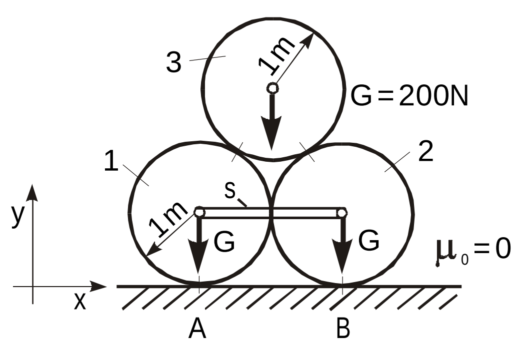
7.12.


1000kg
0,8m
0,8m
A
B
C
0,7m
D
1,4m
g=9,81m/s2
60°
H
E
G
1,6m
1,6m

7.13.


y
2kN/m
B
C
4kN
1m
2m
E
3kN
1m
D
1m
A
x
3,0m
2m

7.14.

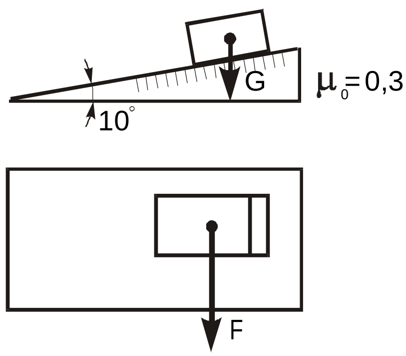

3
1m
G=200N
1
2
S
y
1m
G
G
μ0=0
x
A
B

7.15.

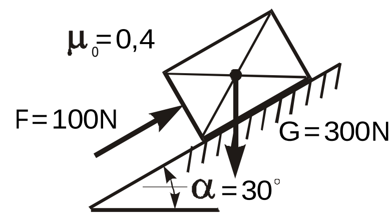
8.00 SÚRLÓDÁS

8.1. Legfeljebb mekkora lehet a vízszintes F erő, hogy a test még nyugalomban maradjon? (8.1. ábra) ; G = 100 N .

8.2. Vizsgálja meg, egyensúlyban van-e a test a lejtőn? Mekkora a súrlódóerő és normálerő? (8.2. ábra)



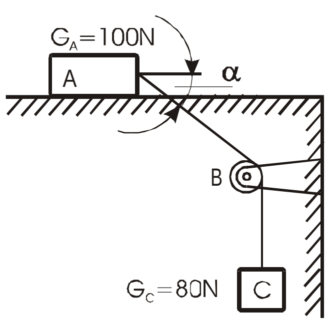
8.1.



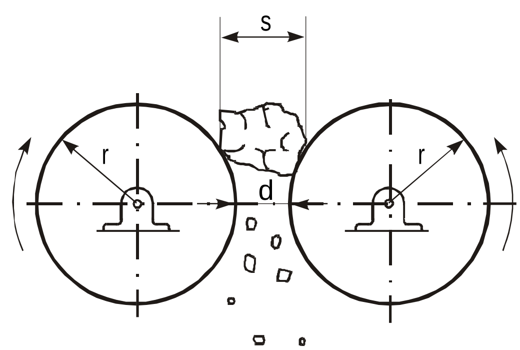
8.2.

8.3. A két test kábellel kapcsolódik. A test és a vízszintes sík közötti súrlódási tényező μ_0 = 0,5. Határozza meg α azon értékét, amikor az A test nem mozdul el!

8.4. A két henger egymással szemben forog. A kőtörőként használt két henger mekkora s méretű követ tud áthúzni csak a súrlódással? μ_0 = 0,35, r = 600 mm, d = 25 mm.



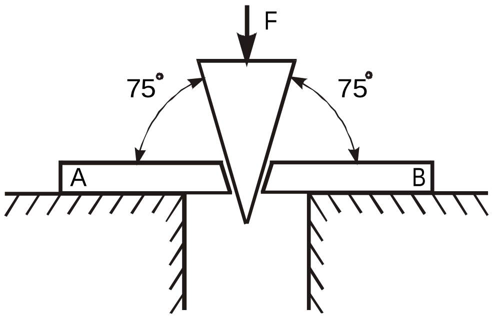
8.3.



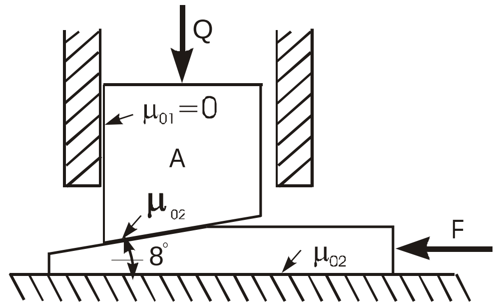
8.4.

8.5. Egy elhanyagolható súlyú éket F erővel két súlyos lemez közé ütünk. ($G_A = G_B$ = 100 N) Határozza meg az F erő azon értékét, amely hatására az ék elmozdul ! A súrlódási tényező a felületek közt μ_0 = 0,35.

8.6. Az A jelű testre (súlya elhanyagolható) Q = 2000 N erő hat. Mekkora erőt kell kifejteni az éken, ha meg akarjuk emelni az A jelű testet ? $\mu_{02} = 0{,}25$

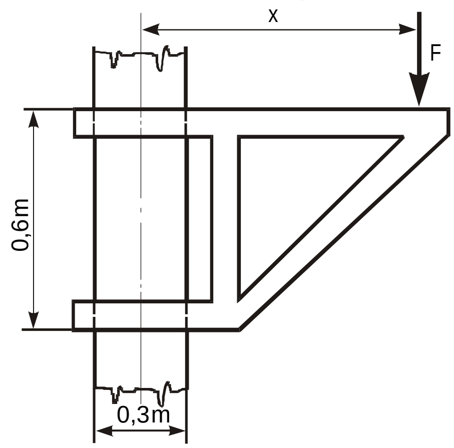


8.5.



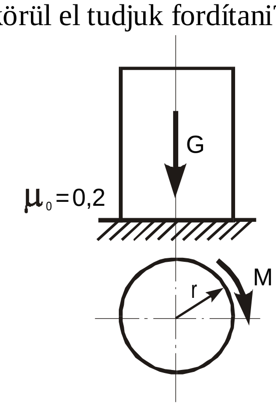
8.6.

8.7. A vázolt súlytalannak tekinthető tartó egy függőleges csövön csúszhat. A súrlódási tényező a cső és tartó között 0,25, határozza meg az F erő hatásvonalának minimális x távolságát amelynél a tartó a csövön nem csúszik le !



8.7.

8.8. Legalább mekkora M nyomaték szükséges, hogy a G = 50 N súlyú, érdes síkon nyugvó hengert a tengelye körül el tudjuk fordítani? r = 30 mm.

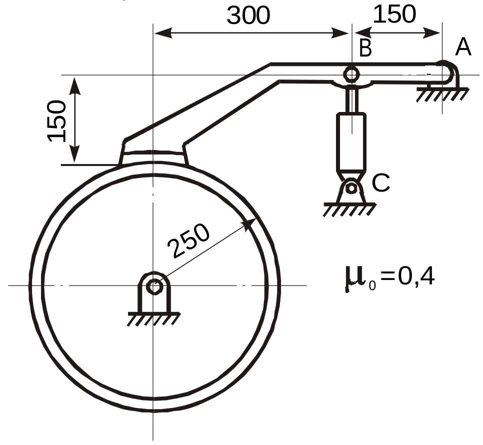


8.8.

8.9. A dobra 90 Nm nyomaték hat. Határozza meg a legkisebb dugattyú erőt, amelynél a dob nem tud elfordulni

a.) óramutató irányában,

b.) órával ellentétes irányban!



8.9.

8.10. A hidraulikus henger 2400N erőt fejt ki a szerkezetre.

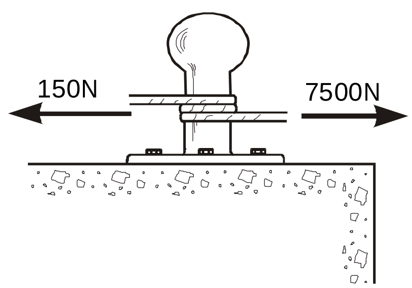
Határozza meg a súrlódó erő nyomatékát a dob tengelye körül, ha a dob

a.) óramutató irányában forog,

b.) óramutatóval ellentétesen forog!

8.11. Egy kötéltartón kétszer vetjük körbe a kötelet!

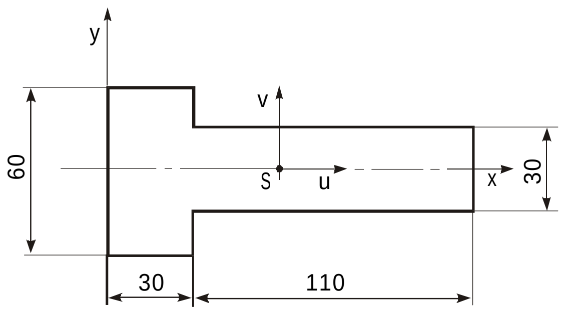
Határozza meg a súrlódási tényező értékét, ha a kötél erők ismertek!



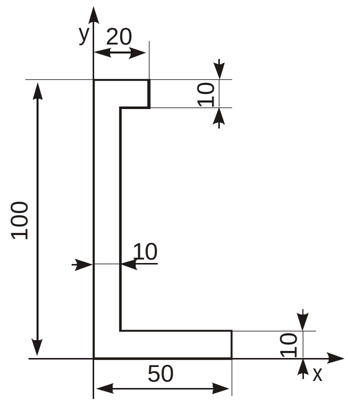
8.11.

9.00 SÍKIDOMOK SÚLYPONTJA ÉS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKAI

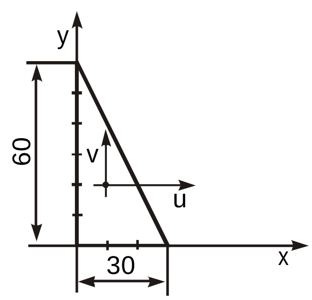
A feladatokban határozza meg a vázolt koordináta- rendszerben (x, y) a síkidomok súlypontját. A súlyponti u, v tengelyekre (párhuzamos az x és u, valamint y és v) határozza meg a másodrendű nyomatékokat, majd a főmásodrendű nyomatékokat és a főtengely helyzetét !



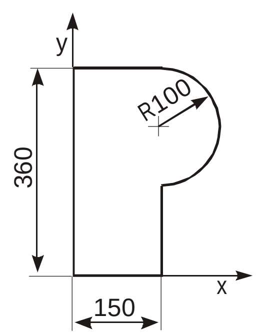
9.1.



9.2.

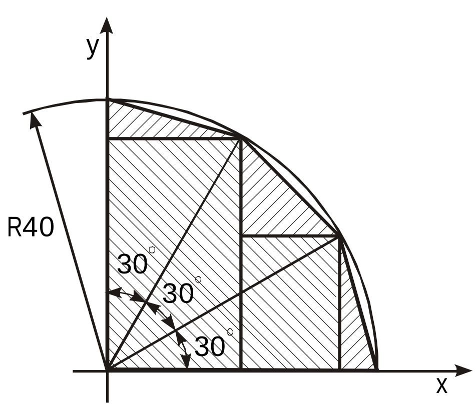


9.3.



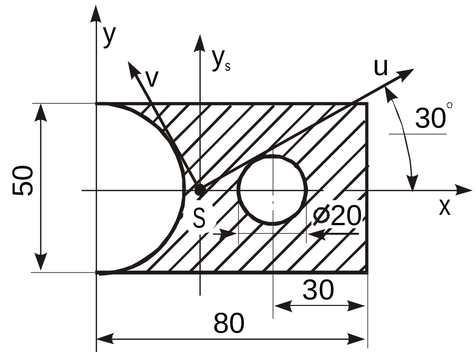
9.4.

9.5. A negyedkör alakú síkidom statikai adatait a vázolt módon háromszögekből és téglalapokból felépítve közelítéssel számolja ki!

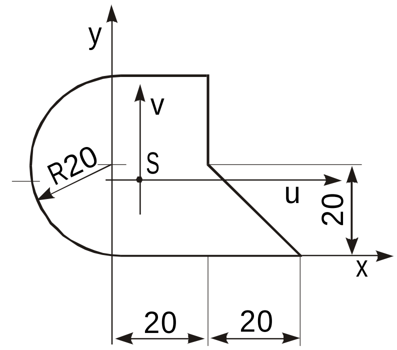


9.5.

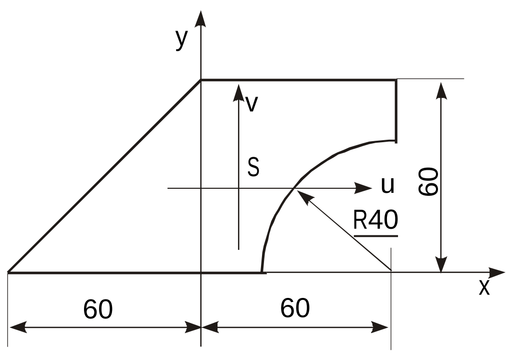
9.6-9.9. A súlyponton átmenő u, v tengelyekre határozza meg a másodrendű nyomatékokat!



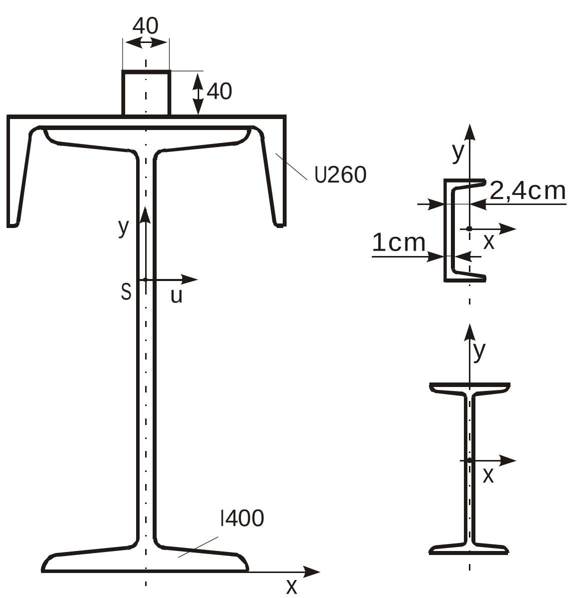
9.6.



9.7.



9.8.



Adatok:

I_x=4800cm^4

I_z=300cm^4

A=50cm^2

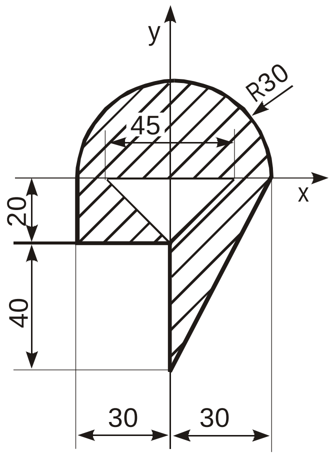
I_x=30000cm^4

I_z=1200cm^4

A=120cm^2

9.9.

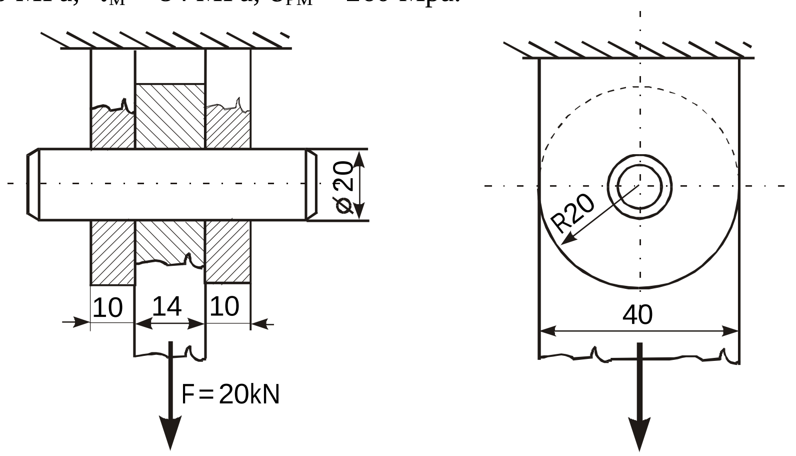
9.10. Mekkorák a keresztmetszet inerciái az x-y tengelypárra?



9.10.

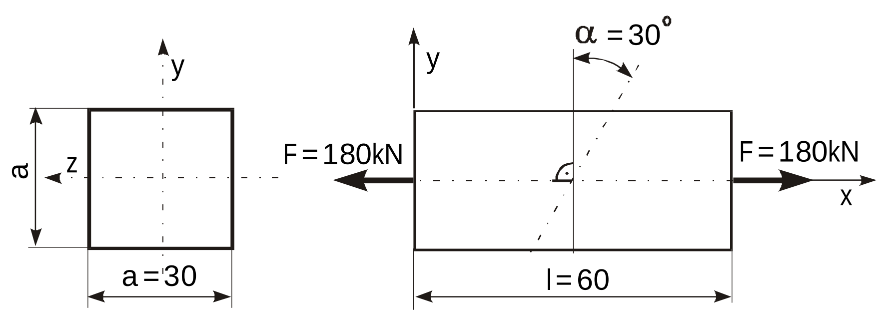
10.00 HÚZÁS-NYOMÁS, TISZTA NYÍRÁS

10.1. Ellenőrizze az ábrán vázolt csapszeges kapcsolatot, ha a csapszeget és lemezt a következő hatások érik:
σ_M = 120 MPa, τ_M = 84 MPa, σ_{PM} = 260 Mpa.



10.1.

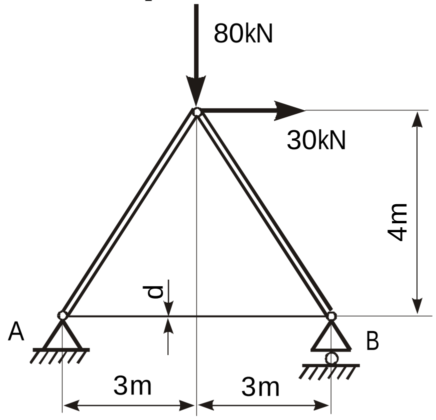
10.2. Az ábrán vázolt állandó keresztmetszetű rúd húzásra van igénybe véve. Határozza meg az 1 méret, valamint az l méret megváltozását, továbbá az α szöggel meghatározott z tengellyel párhuzamos síkon ébredő feszültségeket !
E = 200 GPa, ν = 0,3.



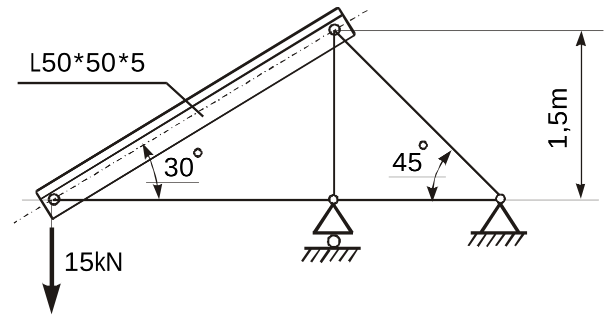
10.2.

10.3. Határozza meg a vízszintes (AB) rúdban ébredő feszültséget és a rúd megnyúlását, ha a rúd körkeresztmetszetű, átmérője d = 24 mm,
E = 2l0 GPa.

10.4. A vázolt rácsos tartóban az 1 = 3 m hosszú szögvas rúd húzott. Határozza meg a rúd-keresztmetszetben ébredő feszültséget és a rúd megnyúlását !
E = 210 Gpa.



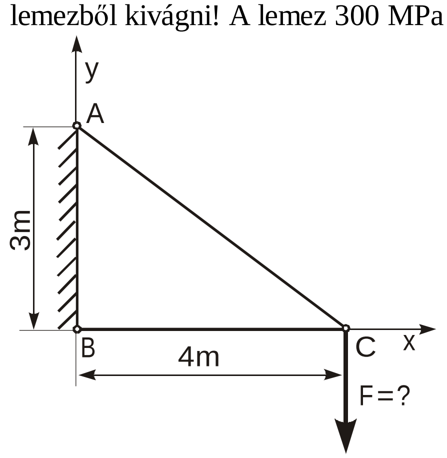
10.3.



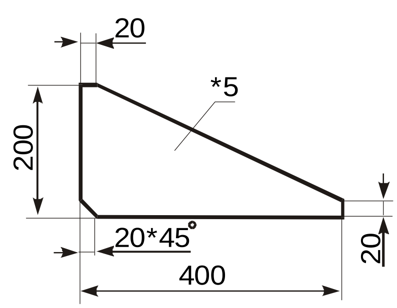
10.4.

10.5. Határozza meg az F erő értékét abban az esetben, ha az A-C rúdban = 120 MPa feszültség ébred! A rúd körkeresztmetszetű, átmérője 20 mm, E = 200 GPa. Határozza meg a B-C rúd összenyomódását, ha a rúd keresztmetszet négyzet, oldal éle 60 mm, E = 10 Gpa! Határozza meg a C pont függőleges elmozdulását!

10.6. Határozza meg a kivágáshoz szükséges erőt, ha az ábrán látható méretű alkatrészt kell lemezből kivágni! A lemez 300 MPa nyírószilárdságú.



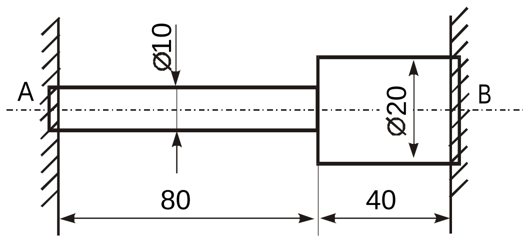
10.5.



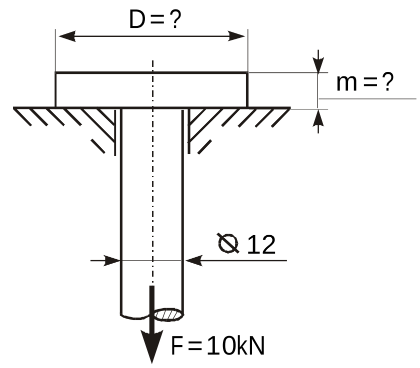
10.6.

10.7. A mindkét végén befogott rúd hőmérsékletét $\Delta T = 50\ ^0K$ - el megnöveljük. Határozza meg az A és B befogásoknál keletkező feszültségeket! Ábra a túloldalon!
$\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, E = 200 Gpa.

10.8. Határozza meg az ábrán vázolt fejes csap fejmagasságát és D átmérőjét! Ellenőrizze a csap szárméretét is! Ábra a túloldalon!
σ_M= 100 MPa, τ_M = 58 MPa, σ_{PM} = 200 Mpa.

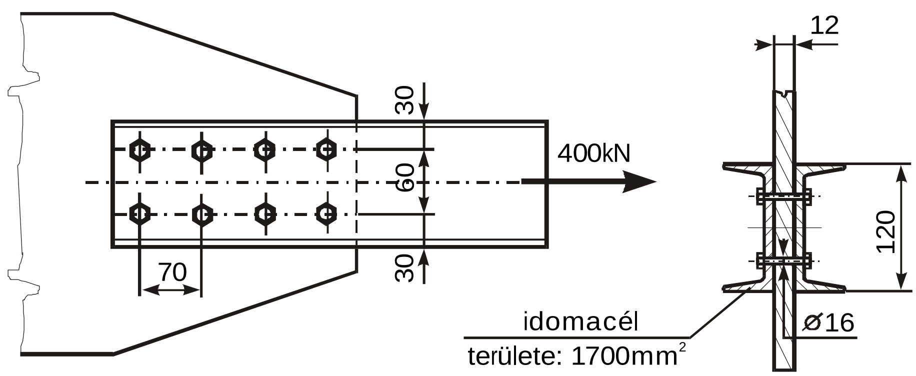


10.7.



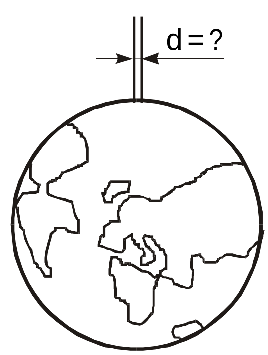
10.8.

10.9. Az ábrán 2 db U idomvas csomólemezre történő bekötése látható. Határozza meg a szükséges illesztett szárú csavar számát ! Ellenőrizze a gyengített U keresztmetszetet! τ_M = 100 MPa, σ_{PM} = 260 MPa, σ_M = 140 Mpa.



10.9.

10.10. Milyen átmérőjű körkeresztmetszetű acélrúddal lehet a Földet megemelni? (A feladat során feltételezzük, hogy ez lehetséges földi körülmények között). A rúd önsúlyát elhanyagoljuk, a Föld sűrűsége ρ = 5520 kg/m^3, sugara R = 6400 km. A köracél anyagára megengedett feszültség σ_M = 250 MPa.

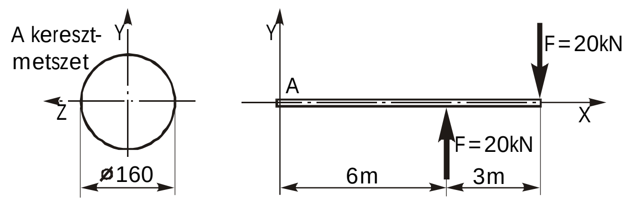


10.10.

11.00 HAJLÍTÁS

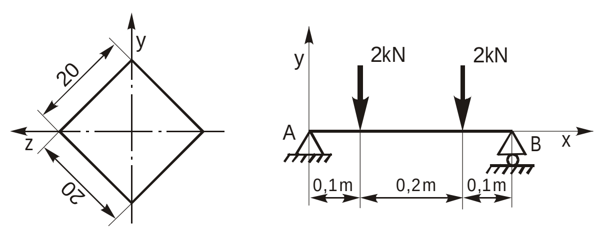
(egyenes hajlítás, hajlítás és nyírás)

11.1. Az egyik végén befogott körkeresztmetszetű rudat erőpár terheli. Rajzolja meg a tartó hajlító nyomatéki ábráját és az A keresztmetszet mentén a feszültségek eloszlását!

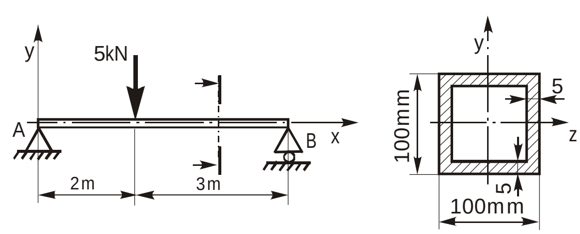


11.1.

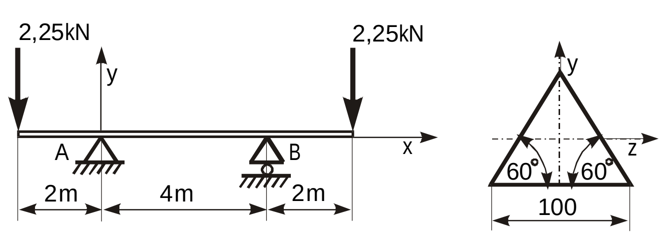
11.2-4. Az állandó keresztmetszetű kéttámaszú tartó terhelése ismert. Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat, határozza meg a maximális normál feszültség értékét és ellenőrizze a tartót, ha anyagára σ_M = 140 Mpa! A nyírásból származó feszültségeket hanyagoljuk el!



11.2.

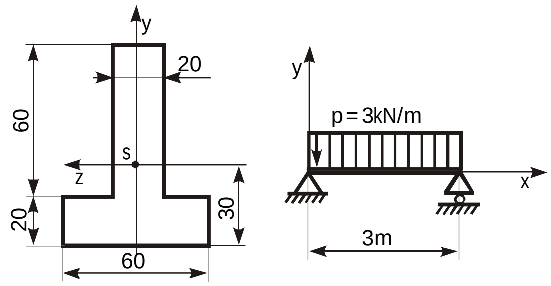


11.3.



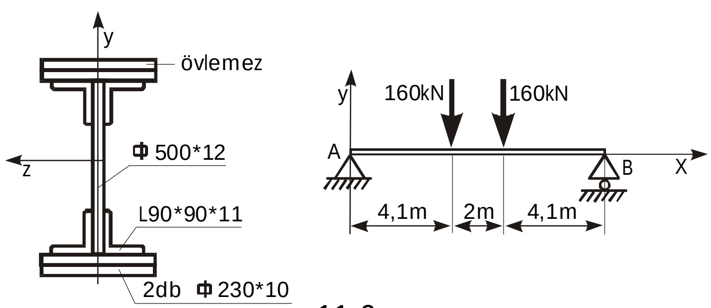
11.4.

11.5. Az adott keresztmetszetű kéttámaszú tartó és terhelése az ábrán látható. A tartó anyaga nem egyformán viseli el a húzást és nyomást. Ellenőrizze a tartót!
σ_{nyM} = 200 Mpa, és $\sigma_{húzóM}$=80 Mpa.



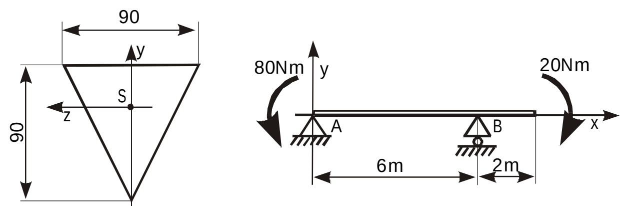
11.5.

11.6. A kéttámaszú tartó keresztmetszete a maximális nyomaték helyén ismert. Határozza meg az övlemez szükséges hosszát úgy, hogy a tartó minden keresztmetszetében a $\sigma_{max} \leq \sigma_M$ feltétel teljesüljön! A nyíró igénybevétel elhanyagolható. σ_M = 160 Mpa.



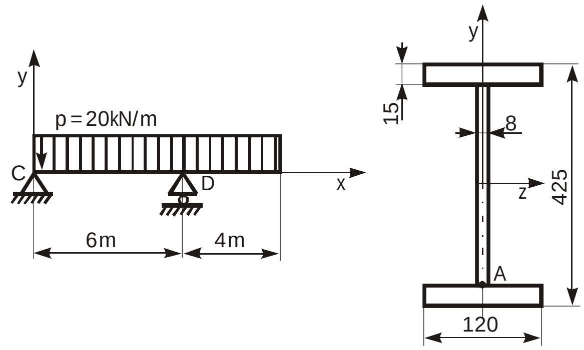
11.6.

11.7. Ellenőrizze hajlításra az adott terhelésű tartót, ha σ_M= 7 MPa! A nyíró igénybevétel elhanyagolható.



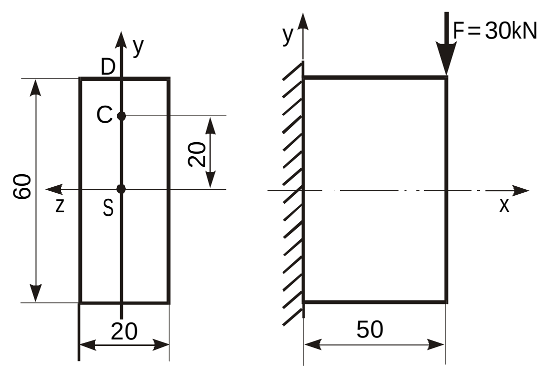
11.7.

11.8. Ellenőrizze a tartót, ha a nyírás nem hanyagolható el ! Határozza meg a veszélyes keresztmetszet A pontjában ébredő feszültségeket és ábrázolja kiskockán !
σ_M= 190 MPa, τ_M = 90 MPa.



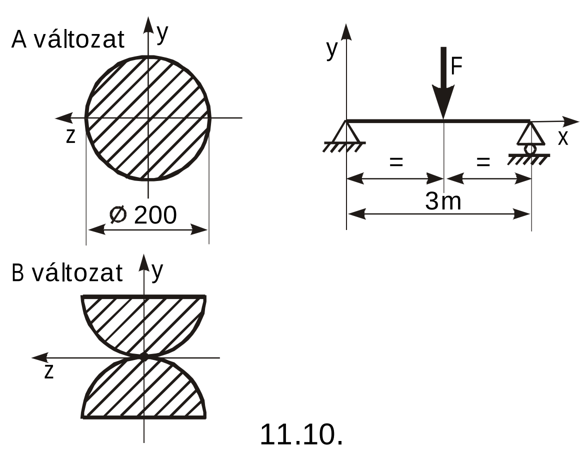
11.8.

11.9. A téglalap keresztmetszetű, egyik végén befogott rudat F erő terheli.
a.) Ellenőrizze a rudat a Mohr-féle elmélet szerint, ha a rúd anyagára
σ_M = 120 Mpa!
b.) Határozza meg a veszélyes keresztmetszet S, C és D pontjában a feszültségeket!



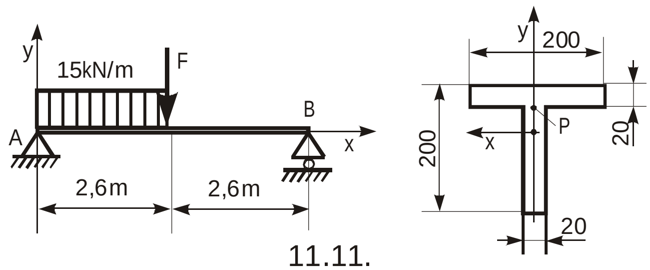
11.9.

11.10. Határozza meg a tartót terhelő F erő nagyságát a hajlító igénybevétel alapján, ha a rúd kör keresztmetszetű ("A" változat) és teljesül a $\sigma_M \angle \sigma_{RED,}$ σ_M = 80 MPa. Mekkora az F erő, ha a keresztmetszetet átalakítjuk ("B" változat)?



11.10.

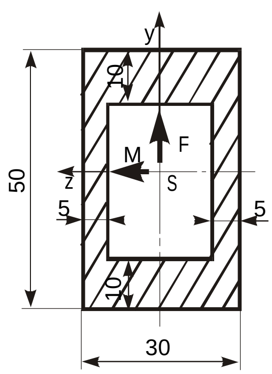
11.11. Határozza meg az adott T keresztmetszetű tartó veszélyes keresztmetszetének P pontjában ébredő feszültségeket (normál és csúsztató)! Végezze el a tartó ellenőrzését MOHR elmélet szerint !
σ_M = 195 MPa, τ_M = 112 MPa.



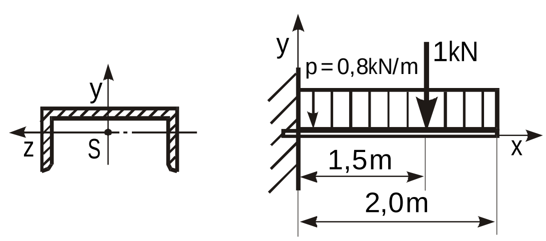
11.11.

11.12. Az üreges téglalap szelvényű rúd K keresztmetszetének igénybevétele ismert.
F = 25 kN, M = 1 kNm.
Rajzolja meg a keresztmetszetben a normál feszültségek és a csúsztató feszültségek eloszlását a jellemző metszékek kiszámításával !

11.13. Az ábrán látható fali konzol terhelése ismert, a tartó keresztmetszete szabványos. U profil (MSZ 326). Határozza meg a szükséges profilméretet! σ_M = 140MPa, τ_M = 81 MPa.



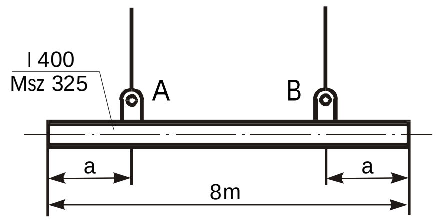
11.12.



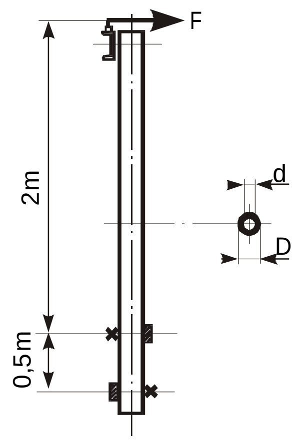
11.13.

11.14. Egy állandó keresztmetszetű gerendát 2 db kötéllel emelünk. Határozza meg az a távolság értékét úgy, hogy a maximális hajlító nyomaték a legkisebb legyen!
A gerenda I 400 (MSZ 325) folyóméter súlya 900 N/m. Határozza meg ebben az esetben a maximális normál feszültséget! Ábra a túloldalon!

11.15. Méretezze az ábrán vázolt szigetelő tartót acélcsőből, ha terhelése $F = 500$ N, $D/d = 1{,}2$, $\sigma_M = 180$ MPa, $\tau_M = 104$ MPa.



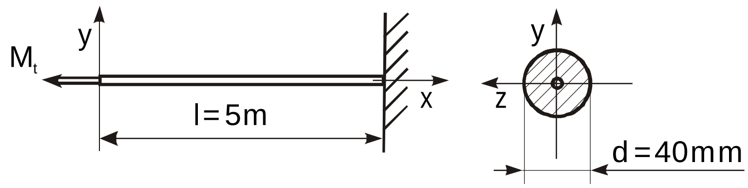
11.14.



11.15.

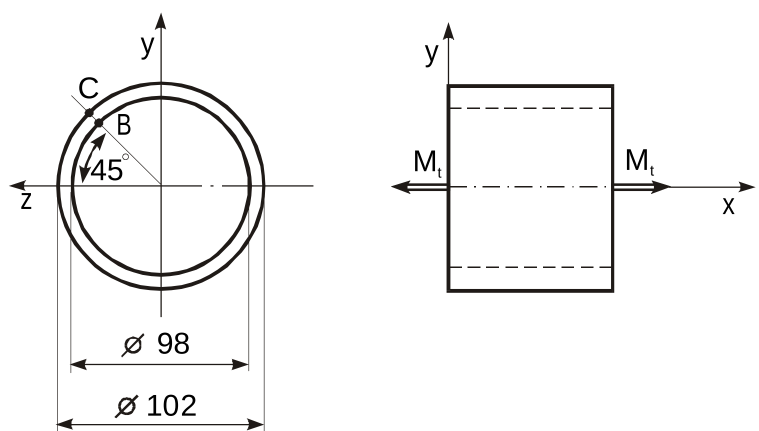
12.00 CSAVARÁS

12.1. Az ábrán vázolt befalazott tartót szélső keresztmetszetében M_t = 1,8 kNm nagyságú erőpár veszi igénybe. Rajzolja meg az igénybevételi ábrát, ellenőrizze a keresztmetszetet és határozza meg a tartó véglapjának szögelfordulását !
τ_M = 135 MPa, G = 80 Gpa.



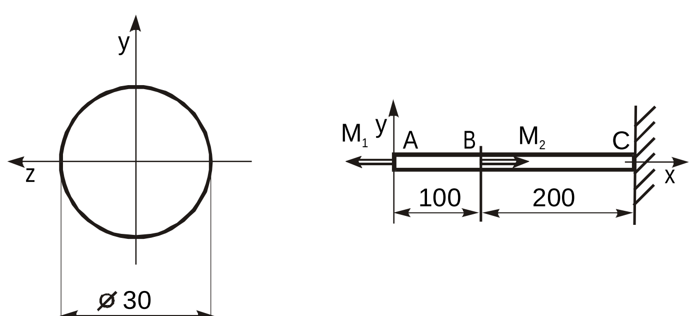
12.1.

12.2. Vékonyfalú csövet M_t = 600 Nm csavarónyomaték terhel. Határozza meg a kijelölt B és C pontban a feszültségek értékét !



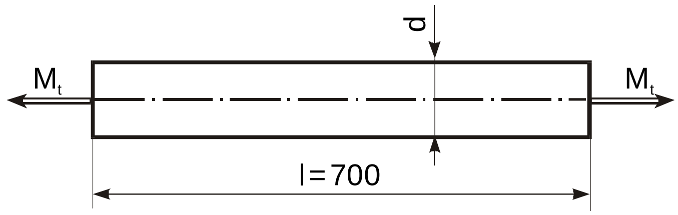
12.2.

12.3. Mekkora M_1 nyomatékú erőpár esetén lesz az <u>A</u> keresztmetszet szögelfordulása zérus, ha M_2 = 12 kNm?



12.3.

12.4. Az 1 hosszúságú, d átmérőjű kör keresztmetszetű rudat M_t = 900 Nm csavarnyomaték terheli. Méretezze a rudat, ha a két végkeresztmetszet megengedett szögelfordulása - egymáshoz képest - $\varphi_{meg} = 2.10^{-3}$ rad,
$G = 80.10^3$ MPa és ellenőrizze feszültségcsúcsra, ha τ_M = 60 MPa !

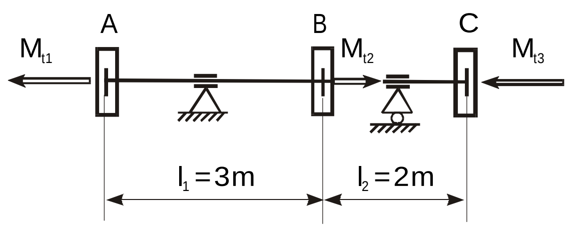


12.4.

12.5. Egy hajtómű tengelynek M_t = 0,8 kNm nyomatékot kell átvenni. Mekkora átmérőjű legyen a tengely, ha τ_M = 50 MPa? A meghatározott átmérő kerekítése után határozza meg az elcsavarodás mértékét 1 = 500 mm hosszú tengely esetén!

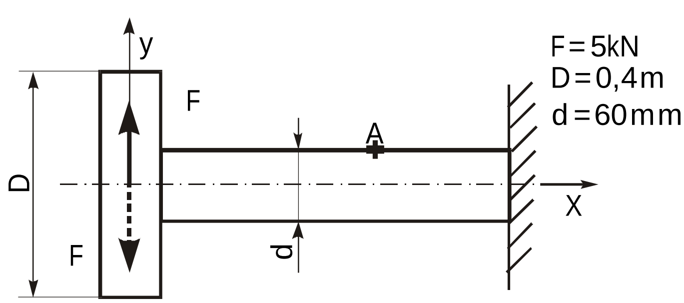
$j_{meg} = \frac{1}{4}\ 0/m$, G = 85 Gpa.

12.6. A vázolt tengely egyensúlyban van. M_{t1} = 20kNm, M_{t2} = 50kNm, G=88Gpa.
a.) Határozza meg az M_{t3} értékét !
b.) Méretezze a tengelyt körkeresztmetszetből ! τ_M =60 MPa
c.) Ha d = 140mm, mekkora a φ_{AB} szögelfordulás?



12.6.

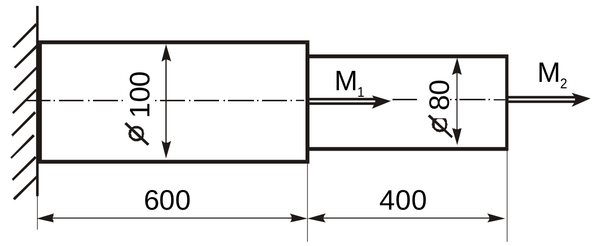
12.7. A d átmérőjű rúdhoz mereven kapcsolódó D átmérőjű tárcsa kerületén állandó +F és -F erőkből álló erőpár működik. Határozza meg a kijelölt
A pontban a főfeszültségek értékét és rajzolja meg a pont MOHR körét!



12.7.

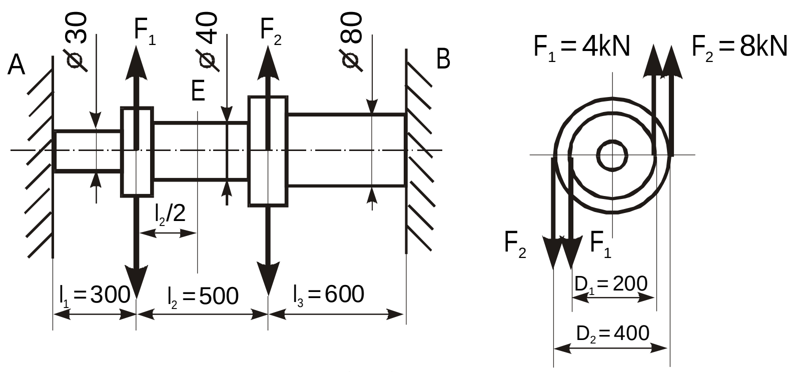
12.8. Egy állandó keresztmetszetű tartó 1 = 150 mm hosszúságú szakaszára M_t = 2 kNm csavarónyomaték hat. Méretezze a tartót kör és körgyűrű keresztmetszetből, ha D/d = 2, τ_M = 60 MPa !
Hasonlítsa össze a két különböző keresztmetszet esetén a tartó tömegét !
Melyiket alkalmazná?

12.9. Az egyik végén befalazott körkeresztmetszetű lépcsős tengelyre M_1 = 12 kNm és M_2 = 5 kNm nyomaték hat. Határozza meg a tartóban felhalmozódott belső energiát és a végső keresztmetszet szögelfordulását !
(G = 80 GPa)



12.9.

12.10. Számítsa ki az alábbi ábrán látható tartó E keresztmetszetében a maximális feszültséget és a φ_E szögelfordulást ! G = 81 Gpa.

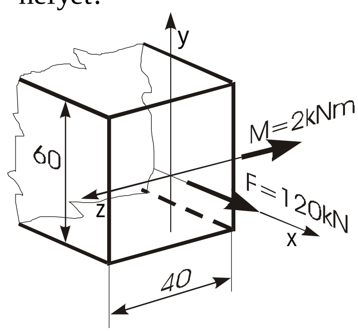


12.10.

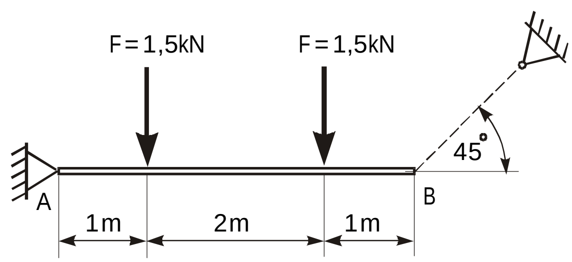
13.00 EGYIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK

13.1 A téglalap keresztmetszetű rúd K keresztmetszetének igénybevétele ismert. Határozza meg szuperpozíció elve segítségével a keresztmetszet feszültségeloszlását és ellenőrizze a rudat, ha σ_M = 180 MPa ! Határozza meg a zérusvonal helyét!

13.2. Ellenőrizze a vízszintes rudat, ha keresztmetszete I 100 szabványos idomacél! A nyírás igénybevétele elhanyagolható. σ_M = 140 MPa. Határozza meg a zérusvonal helyét!



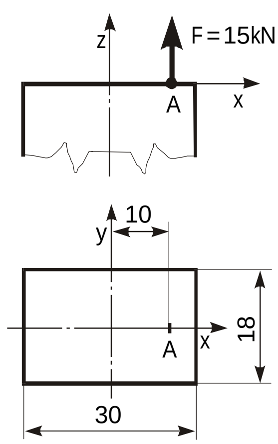
13.1.



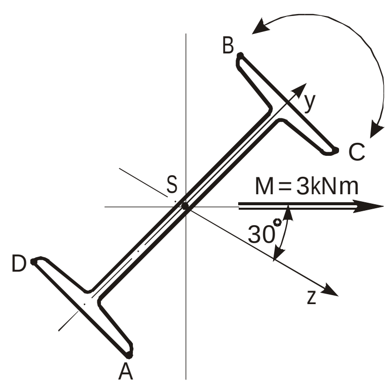
13.2.

13.3. Az ábrán feltüntetett derékszögű négyszög keresztmetszetű acél rudat F = 15 kN húzóerő az A pontban terheli. Határozza meg a keresztmetszetben ébredő feszültségeket !

13.4. Egy szabványos I 180 idomacélból készült gerendát M = 3 kNm nyomatékú erőpár hajlításra terheli. Határozza meg a gerenda keresztmetszet A, B, C, D pontjaiban a feszültségeket és a semleges tengely helyét !

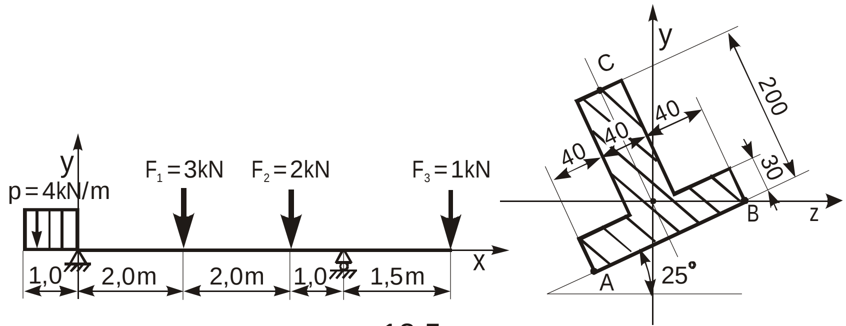


13.3.



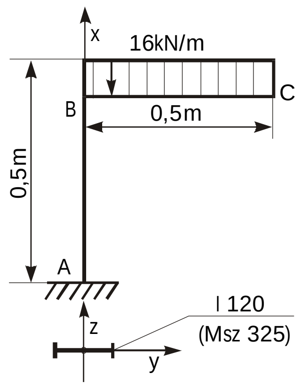
13.4.

13.5. Határozza meg a maximális nyomaték helyén a T keresztmetszet szélső pontjaiban ébredő feszültségeket ! (A, B,C)



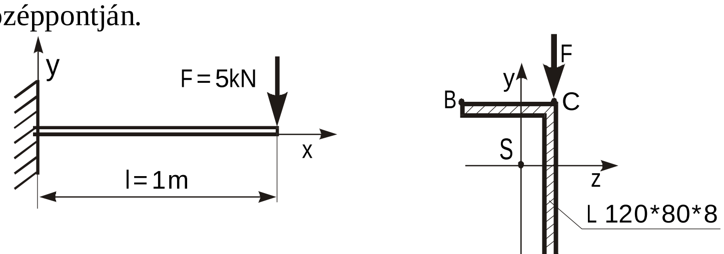
13.5.

13.6. Az ismert terhelésű tartó AB szakaszát ellenőrizze! Kihajlás-veszély nincs.
σ_M = 80 MPa.

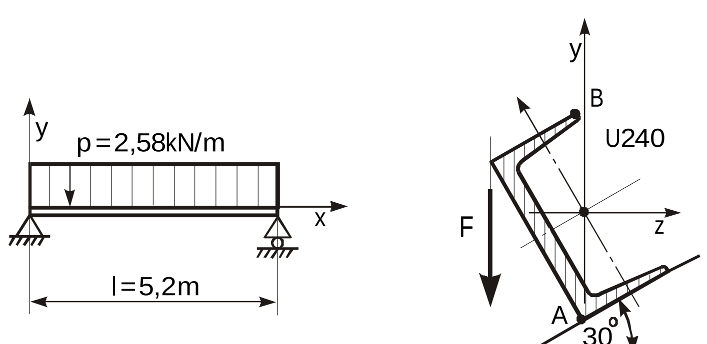


13.6.

13.7-8. Határozza meg a maximális nyomaték helyén a szélső pontok feszültségeit a nyírófeszültségek elhanyagolásával ! A terhelések eredője átmegy a keresztmetszetek nyírási középpontján.

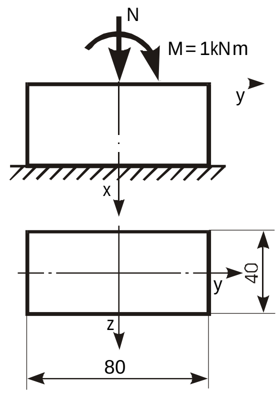


13.7.



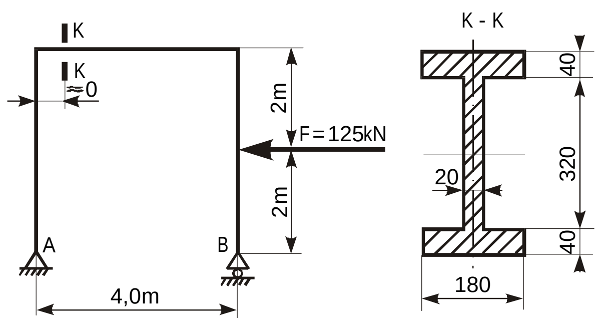
13.8.

13.9. Adott egy téglalap keresztmetszetű oszlop. A keresztmetszetre működő hajlítónyomaték M = 1,0 kNm. Mekkora N normálerőt kell működtetni egyidejűleg a tartóra, hogy a keresztmetszetben csak nyomófeszültség ébredjen?



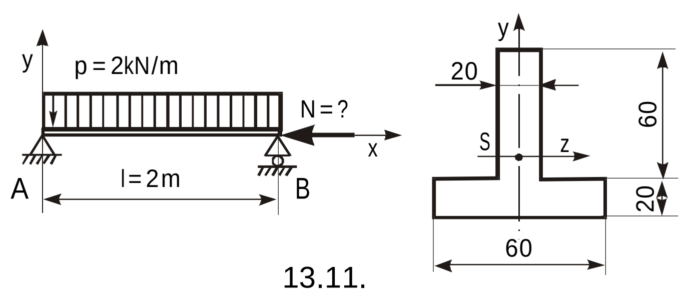
13.9.

13.10. Határozza meg a tartó K keresztmetszetének feszültség eloszlását, ha a nyírástól eltekintünk ! σ_{RED} = ?



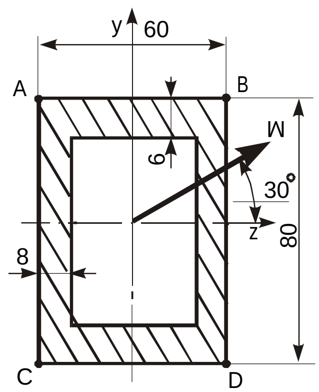
13.10.

13.11. A gerenda terhelése ismert. Mekkora N nyomóerőt kell a súlypontban működtetnünk, ha azt kívánjuk elérni, hogy $\sigma_{húzó\ max}$ = 20 MPa legyen?



13.11.

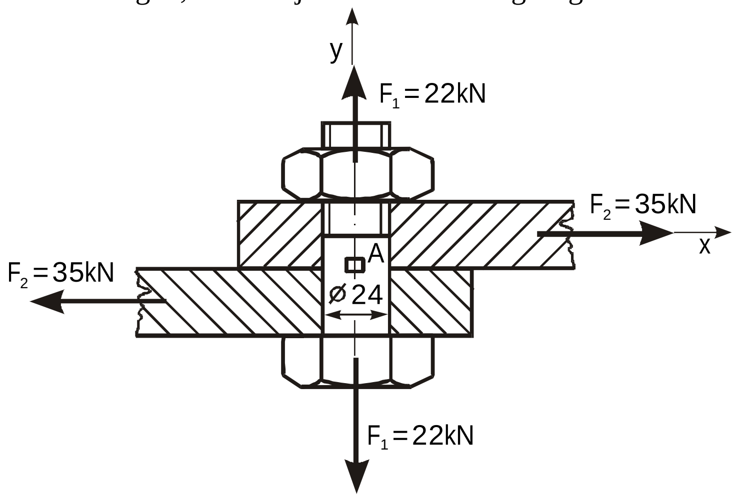
13.12. A vázolt keresztmetszetre M nyomatékú erőpár hat, adott síkban.
Határozza meg a keresztmetszet szélső pontjaiban ébredő feszültségeket!
M = 3,75 kNm.



13.12.

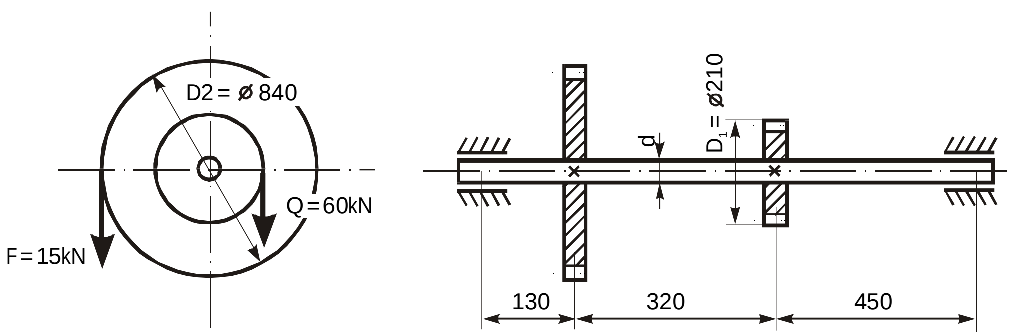
14.00 TÖBBIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK

14.1. Határozza meg a feszített csavar nyírt keresztmetszetében lévő A pont feszültségi állapotát, főfeszültségeit, azok síkjait MOHR kör segítségével !



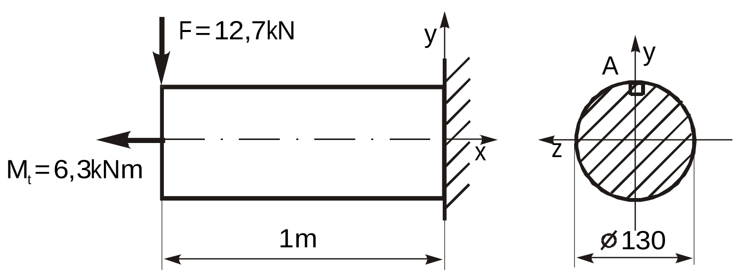
14.1.

14.2. Határozza meg a szükséges tengelyátmérőt, ha σ_M = 95 MPa, τ_M = 50 MPa !



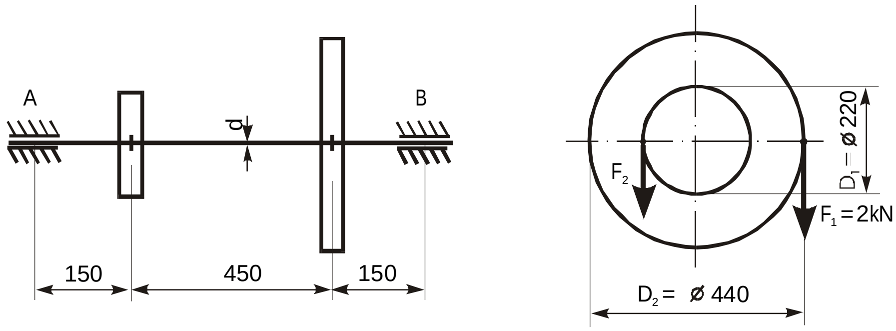
14.2.

14.3. Határozza meg a befalazási keresztmetszet A pontjában ébredő feszültségeket és a MOHR kör szerkesztése alapján a főfeszültségeket, a főirányt !



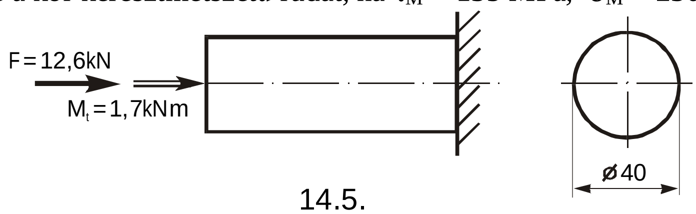
14.3.

14.4. Méretezze az ábrán vázolt tengelyt, ha σ_M = 190 MPa. τ_M = 100 MPa !



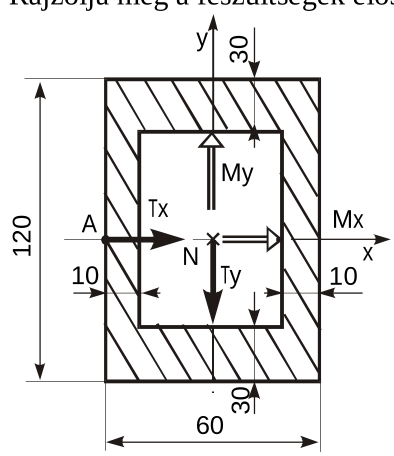
14.4.

14.5. Ellenőrizze a kör keresztmetszetű rudat, ha τ_M = 135 MPa, σ_M = 230 MPa !



14.5.

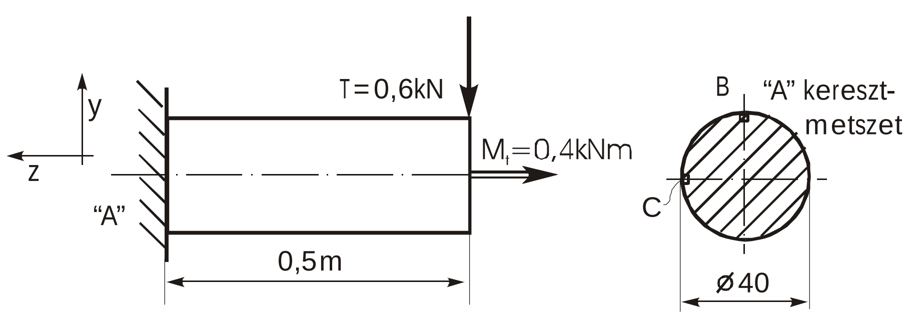
14.6. Ismert a keresztmetszet és a terhelései.
Rajzolja meg a feszültségek eloszlását és számítsa ki az "A" pont redukált feszültségét!



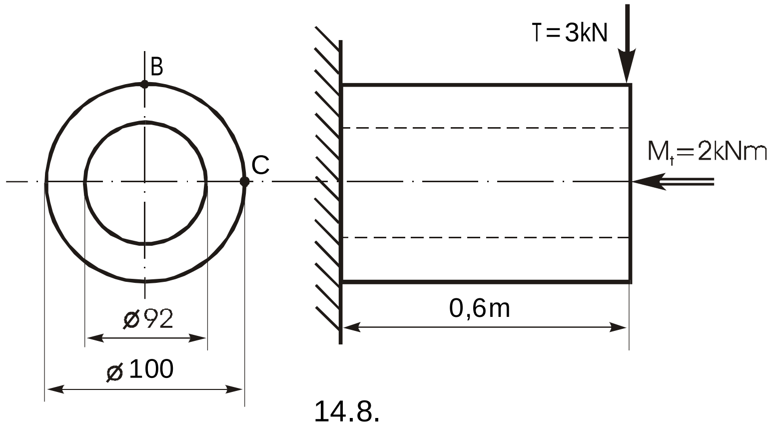
N = 70 kN, T_x = 20 kN,
T_y = 30 kN,
M_x = 12 kNm, M_y = 5 kNm,
A = 4800 mm^2,
I_x = 792.10^{-8} m^4,
I_y = 184.10^{-8} m^4.

14.6.

14.7-8. A rudat terhelő erőrendszer ismert. Határozza meg a befogás keresztmetszetének igénybevételeit és a kijelölt pontokban a főfeszültségek és főirányok értékeit!

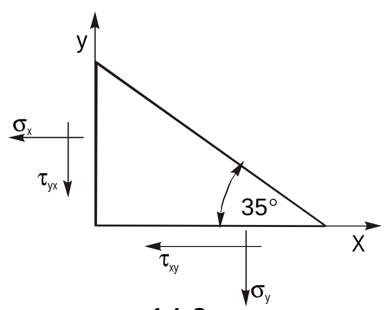


14.7.



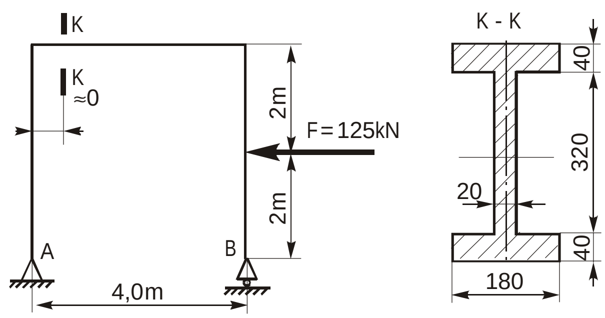
14.8.

14.9. Az egységnyi vastag derékszögű háromszöglap befogóira ható normál és nyírófeszültségek ismeretesek.
Határozza meg az átfogó oldalán fellépő ρ_n feszültségeket, ill. ennek normál és nyíró komponensét!
$\sigma_x = 60$ N/mm^2, $\sigma_y = 35$ N/mm^2, $\tau_{xy} = 20$ N/mm^2.



14.9.

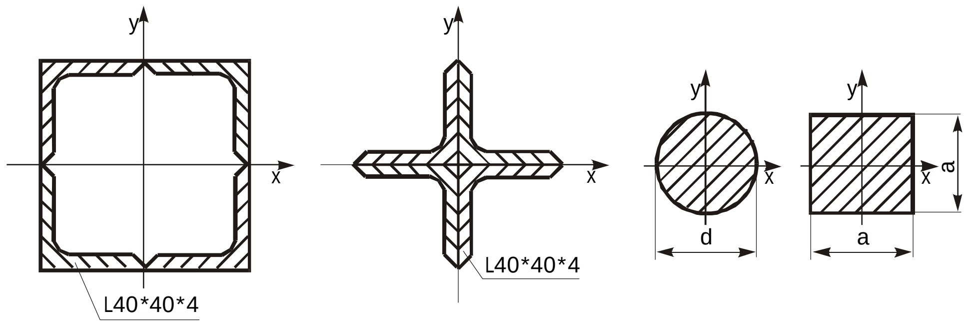
14.10. Határozza meg a tartó K keresztmetszetének feszültségeloszlását !



14.10.

15.00 KIHAJLÁS

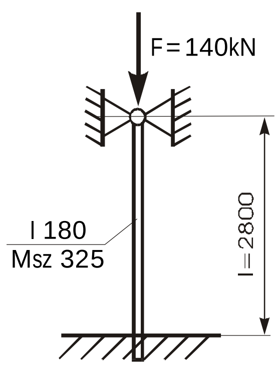
15.1. Az ábrán látható négy rúd különböző alakú, de azonos keresztmetszetű (A = 1232 mm^2). Hasonlítsuk össze a karcsúsági tényező értékeit, feltételezve, hogy a rudak egyenértékű hossza megegyezik. l_0 = 1500 mm!



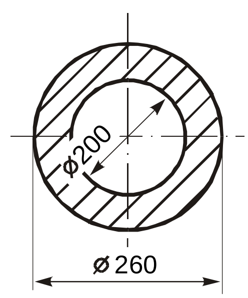
15.1.

15.2. Ellenőrizze az ábra szerinti megfogású és terhelésű I 180 szelvényű rudat, ha E = 210 GPa, n = 3 !

15.3. Egyik végén befogott öntöttvas rudat F = 9 kN erő centrikusan terhel. A rúd keresztmetszete az ábrán látható. Ellenőrizze a rudat! 1 = 4 m, E = 100 GPa, n = 10.



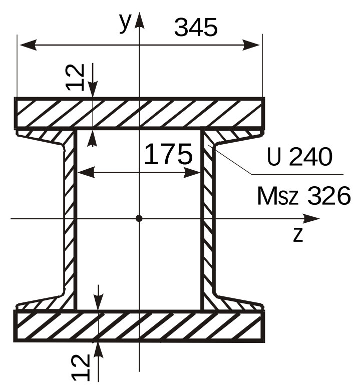
15.2.



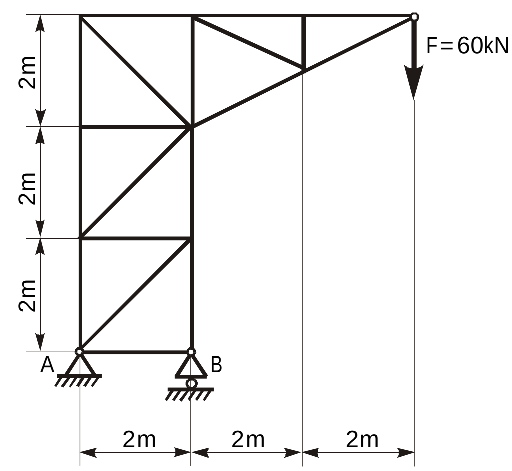
15.3.

15.4. Az ábrán vázolt keresztmetszetű rudat ellenőrizze! A rúd egyik végén befogott. F = 700 kN, l = 10 m, σ_M = 140 MPa.

15.5. Ellenőrizze a vázolt rácsos tartót, ha a rudak azonos keresztmetszetű csőből készülnek.
D = ∅108 mm, d = ∅100 mm, n = 3, E = 210 GPa,
s_M = 140 MPa.

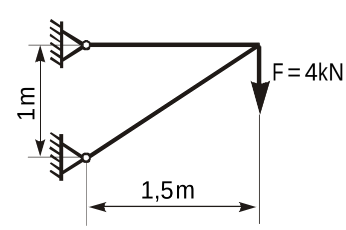


15.4.



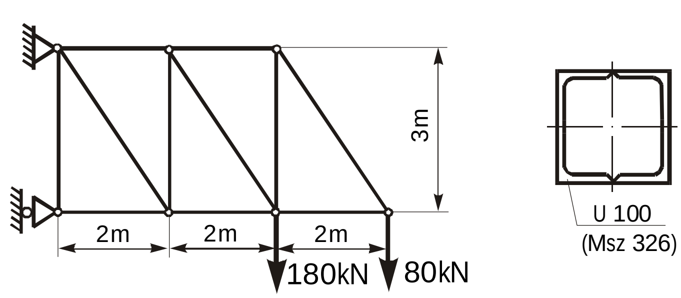
15.5.

15.6 Az ábrán vázolt szerkezetet F = 4 kN függőleges erő terheli. Ellenőrizze a rudat! A nyomott rúd ellenőrzését ω eljárással végezze. A rudak csőből készülnek.
D = ∅40 mm, d = ∅34 mm, σ_M = 140 MPa.



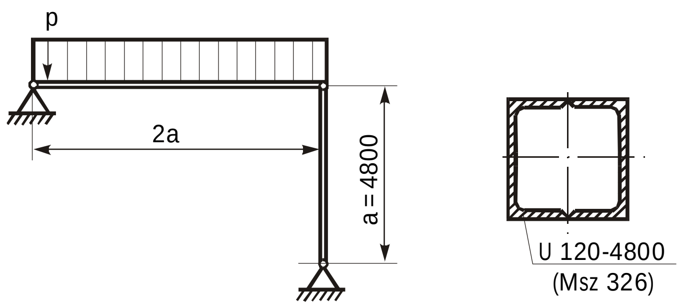
15.6.

15.7. Ellenőrizze a rácsos tartó rúdjait! A kihajlásra történő ellenőrzést ω eljárással végezze. A rudak keresztmetszete azonos 2 db U 100 szabványos idomvasból készül. σ_M = 160 MPa. (Rúderők a 6.8.-as feladatban!)



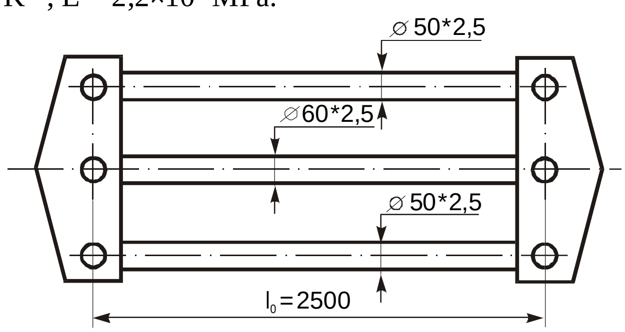
15.7.

15.8. Mekkora p megoszló terheléssel van terhelve az ábrán látható tartószerkezet, ha a függőleges rúdban éppen a kihajlásra megengedett erő ébred és keresztmetszete 2 db U acél? E = 210 GPa, n = 3.



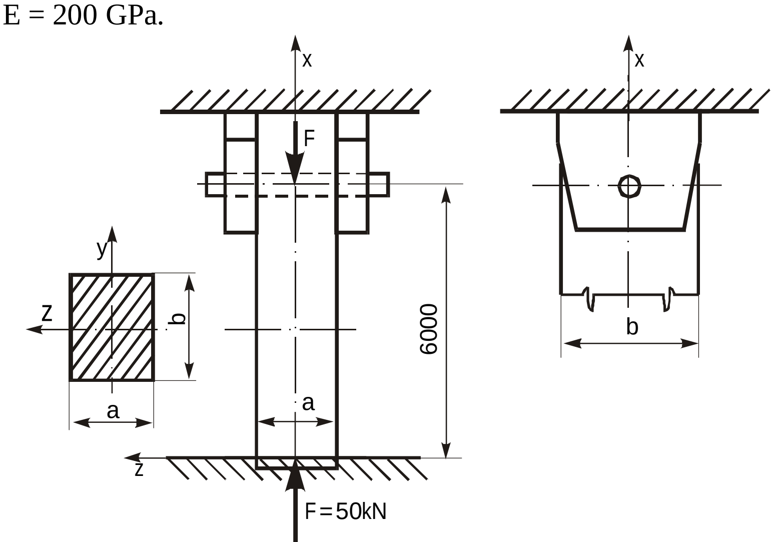
15.8. v

15.9 A két szélső rúd hőmérséklete $\Delta T = 40\ ^0$K-el csökken, a középső rúdé állandó marad. Mindhárom rúd cső keresztmetszetű, adott méretekkel. Határozza meg, hogy a középső rúd mekkora biztonsággal rendelkezik kihajlás szempontjából !
$\alpha = 11{,}5.10^{-6}$ K^{-1}, $E = 2{,}2\times10^{5}$ MPa.



15.9.

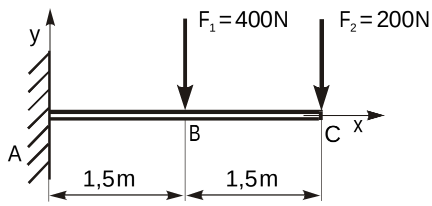
15.10. A következő oldali ábrán látható téglalap szelvényű rúd alul befogott. Felül a hengeres csukló egyik irányban elfordulási lehetőséget biztosít, a másik irányban a rúd befogottnak tekinthető. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy a nyomott rúd az adott erő hatására mindkét irányban egyenlő biztonságú legyen kihajlás szempontjából!
n = 3, E = 200 GPa.



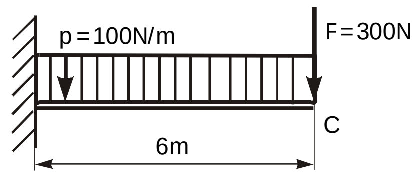
15.10.

16.00 HAJLÍTOTT TARTÓK ALAKVÁLTOZÁS SZÁMÍTÁSA

16.1-2. Határozza meg a tartó C pontjának függőleges elmozdulását és szögelfordulását, ha a rúd hajlító merevsége ismert!
$IE = 4.10^6\ Nm^2$.

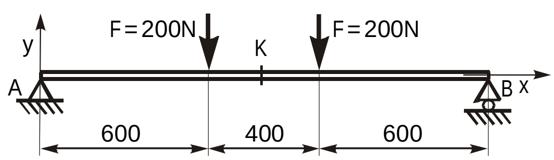


16.1.

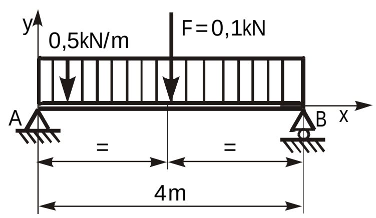


16.2.

16.3-4. Határozza meg a tartó középső keresztmetszetének függőleges elmozdulását és a támaszpontok szögelfordulását !
$IE = 7{,}5.10^4\ Nm^2$

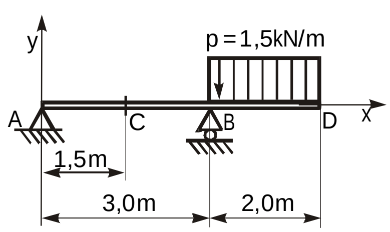


16.3.

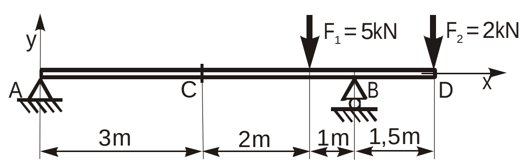


16.4.

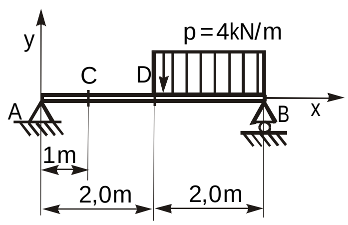
16.5-8. Határozza meg a kéttámaszú tartók C és D keresztmetszetének függőleges elmozdulását és szögelfordulását!
$IE = 10.10^6\ Nm^2$.



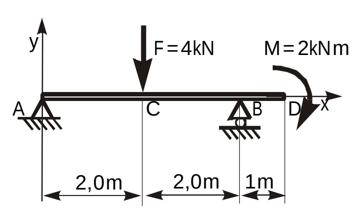
16.5.



16.6.

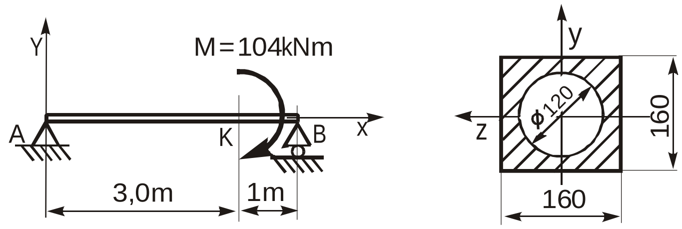


16.7.



16.8.

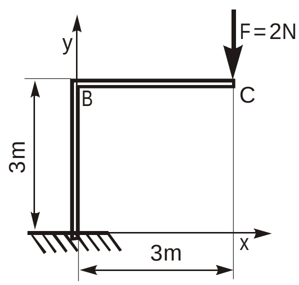
16.9. Határozza meg az adott kéttámaszú tartó "A" keresztmetszetében a szögelfordulást, "K" pontban a szögelfordulást és lehajlást ! E = 210 GPa.

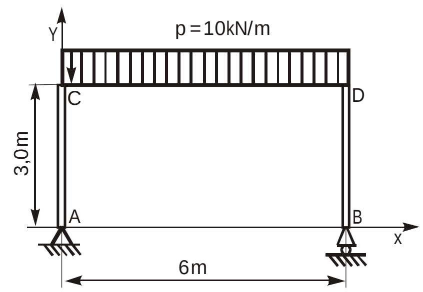


16.9.

16.10. Határozza meg a tartó C pontjának függőleges elmozdulását és szögelfordulását! IE = 4.10^6 Nm^2.

16.11. Határozza meg a törtvonalú tartó B pontjának vízszintes elmozdulását ! IE = 45.10^6 Nm^2

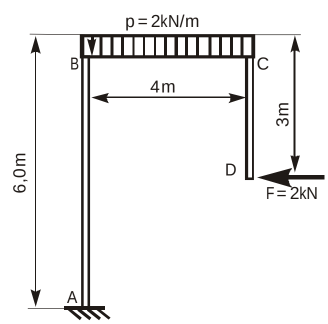




16.10.

16.11.

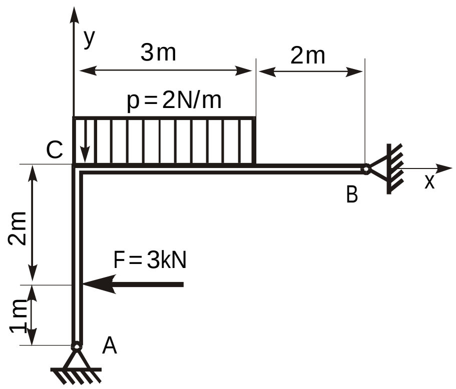
16.12. Határozza meg az alábbi keretszerkezet "D" keresztmetszetének vízszintes irányú elmozdulását, ha a hajlítási merevség: I.E = 10^7 Nm^2 (Végig állandó)



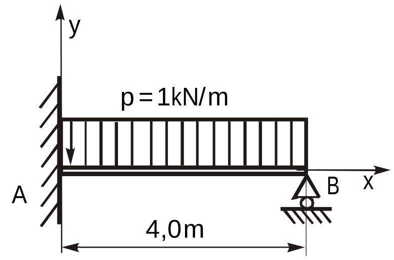
16.12.

17.00 STATIKAILAG HATÁROZATLAN SZERKEZETEK

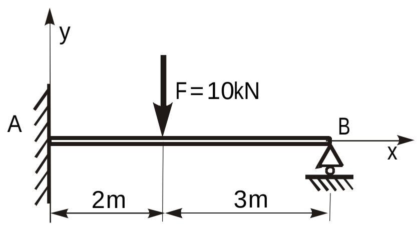
Számítsa ki az ábrázolt tartók támasztásaiban fellépő egyensúlyozó erőket!
Ha a feladatoknál egyéb megjegyzés nincs, akkor a tartószakaszokon a hajlítási merevség állandó.



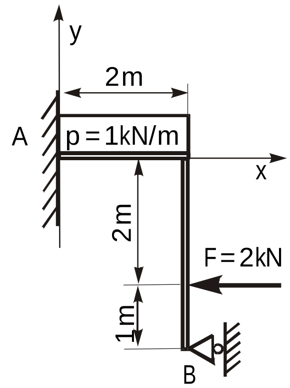
17.1.



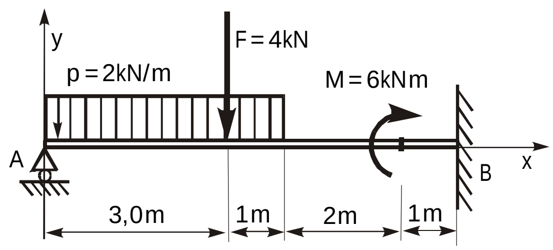
17.2.



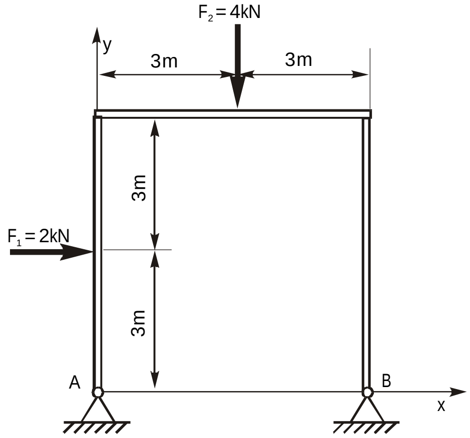
17.3.



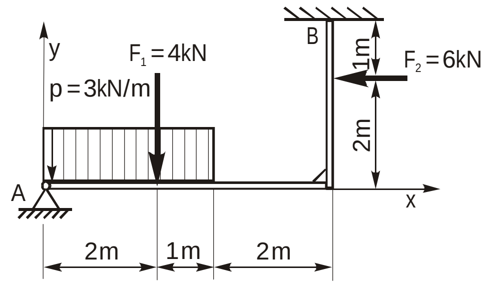
17.4.



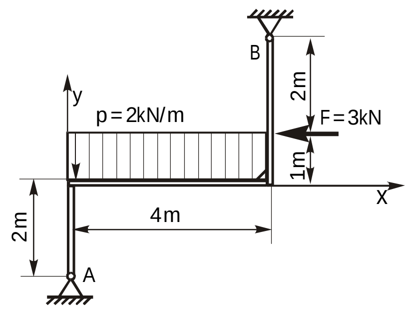
17.5.



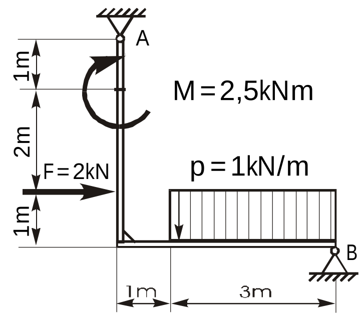
17.6.



17.7.

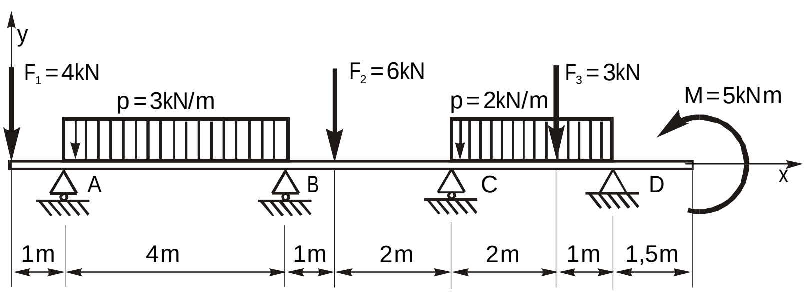


17.8.

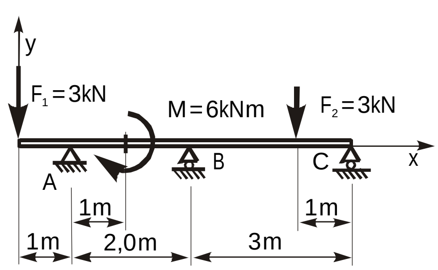


17.9.

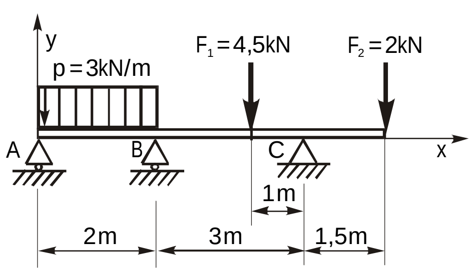
Határozza meg az alábbi többtámaszú folytatólagos tartók kényszereiben fellépő erőket és igénybevételi ábráit! A tartók végig állandó keresztmetszetűek.



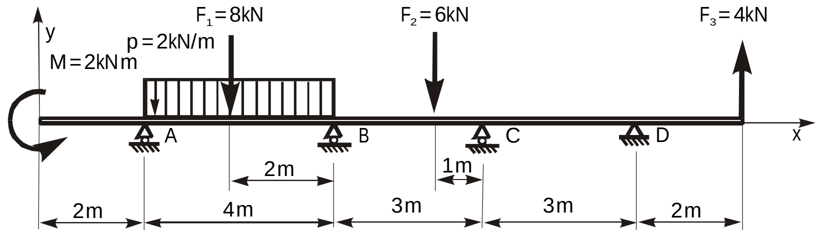
17.10.



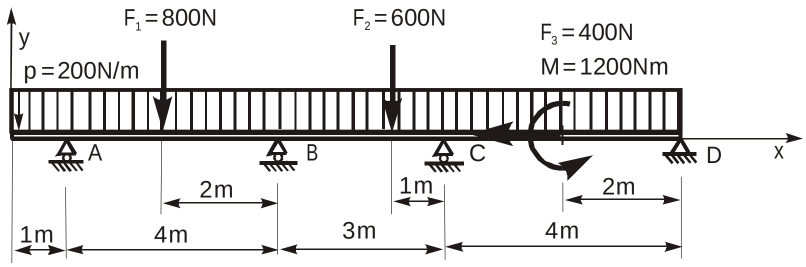
17.11.



17.12.


F1=8kN
F2=6kN
F3=4kN
y
p=2kN/m
M=2kNm
A
B
C
D
x
2m
1m
2m
4m
3m
3m
2m

17.13.


F1=800N
F2=600N
F3=400N
M=1200Nm
y
p=200N/m
A
B
C
D
x
2m
1m
2m
1m
4m
3m
4m

17.14.

MEGOLDÁSOK

1.0 SIKBELI ERŐRENDSZER

1.1 $\bar{r}_{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$

$$\bar{r}_{AB} = (6-4)\bar{i} + (8-5)\bar{j}$$

$$2r_{AB} = 4\bar{i} + 6\bar{j} \quad (m)$$

1.2. Abszolút értékeik alapján a vektorok**:**

$$\bar{F}_1 = \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 400\bar{i} + \frac{1}{2}\cdot 400\bar{j}\right) \quad N$$

$$\bar{F}_2 = \left(0\bar{i} + 600\bar{j}\right) \quad N$$

$$\bar{F}_3 = \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 200\bar{i} - \frac{1}{2}\cdot 200\bar{j}\right) \quad N$$

$$\bar{F}_4 = \left(-400\bar{i} + 0\bar{j}\right) \quad N$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

$$\bar{F} = \left(119{,}6\bar{i} + 700\bar{j}\right) \quad N$$

$$\left|\bar{F}\right| \cong 710 \quad N$$

1.3.

$$\bar{a} = \left(4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 4\cdot\frac{1}{2}\bar{j}\right) \quad m$$

$$\bar{b} = \left(6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) \quad m$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \left(7{,}61\bar{i} + 6{,}24\bar{j}\right) \quad m$$

$$\bar{a} - \bar{b} = -\left(0{,}78\bar{i} + 2{,}24\bar{j}\right) \quad m$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 23{,}18 \quad m^2$$

$$\bar{a}xb = 6{,}2\,\bar{k} \quad m^2$$

1.4. $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos j = 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 6 \quad m^2$

$$\bar{a}x\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin j = 4\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10{,}39 \quad m^2$$

1.5. $\bar{r}_{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \left(4\bar{i} + 3\bar{j}\right) \quad m$

$$\left|\bar{r}_{AB}\right| = \sqrt{4 \ + 3^2} = 5$$

$$\bar{e}_{AB} = \frac{\bar{r}_{AB}}{\left|\bar{r}_{AB}\right|} \qquad \bar{e}_{AB} = 0{,}8\bar{i} + 0{,}6\bar{j}$$

1.6.

Ha P rajta van az egyenesen, akkor a vektorok által kifeszített paralelogramma területe:

$$\bar{e}x\left(\bar{r} - \bar{r}_A\right) = \bar{0}$$
$$\bar{e}x\bar{r} - \bar{e}x\bar{r}_A = 0$$
$$\bar{e}x\bar{r}_A = 2{,}2\bar{k}$$
$$0{,}8y = 0{,}6x + 2{,}2$$
$$\bar{e}x\bar{r} = \left(0{,}8y - 0{,}6x\right)\bar{k}$$
$$y = \frac{3}{4}x + 2{,}75$$

1.7.

$$\cos j = \frac{\left|\bar{r}_{AB} \cdot \bar{r}_{AC}\right|}{\left|r_{AB}\right| \cdot \left|r_{AC}\right|} = \frac{19}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{50}}$$

$$j \cong 60^o$$

1.8.

$$\left|\bar{a}_e\right| = \bar{a} \cdot \bar{e}$$

$$\bar{a}_e = 4{,}535 \quad m$$

1.9.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ tehát a merőleges b-re
csak az a) esetben teljesül.

1.10.

$$\bar{n} = \bar{r}_B x \bar{r}_C$$
$$\bar{n} = \left(3\bar{i} + 5\bar{j}\right)x\left(8\bar{i} + 0\bar{j}\right)$$
$$\bar{n} = -40 \quad \bar{k}$$
$$A = \frac{1}{2}\left|\bar{r}_B x \bar{r}_C\right| = 20 \quad m^2$$

1.11.

$$\overline{F}_0 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 20\overline{i} + 54\overline{j} \quad kN$$

$$\overline{e} = \frac{\overline{F}_0}{\left|\overline{F}_0\right|}$$

$$\left|\overline{F}_0\right| = 57{,}58 \quad kN \qquad \overline{e} = 0{,}347\overline{i} + 0{,}938\overline{j}$$

1.12.

Vektorosan:

$$\overline{F}_i = \left|\overline{F}_i\right| \cdot \overline{e}_i$$

$$\overline{e}_1 = \cos 30^o\,\overline{i} + \sin 30^o\,\overline{j}$$

$$\overline{e}_2 = -\sin 20^o\,\overline{i} + \cos 20^o\,\overline{j}$$

$$\overline{e}_3 = -1\overline{j}$$

$$\overline{e}_4 = \cos 15^o\,\overline{i} - \sin 15^o\,\overline{j}$$

$$\overline{R} = \left|\overline{F}_1\right| \cdot \overline{e}_1 + \left|\overline{F}_2\right| \cdot \overline{e}_2 + \left|\overline{F}_3\right| \cdot \overline{e}_3 + \left|\overline{F}_4\right| \cdot \overline{e}_4$$

$$\overline{R} = 199{,}1\overline{i} + 14{,}3\overline{j} \quad [N]$$

$$\left|\overline{R}\right| = 199{,}6 \quad N$$

$$tga = \frac{14{,}3}{199{,}1} \rightarrow a = 4{,}1^o$$

Skalárisan:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^o \qquad ; F_{1y} = F_1 \cdot \sin 30^o$$

$$F_{2x} = -F_2 \cdot \sin 20^o \qquad ; F_{2y} = F_2 \cdot \cos 20^o$$

$$F_{3x} = 0 \qquad ; F_{3y} = F_3$$

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos 15^o \qquad ; F_{4y} = -F_4 \cdot \sin 15^o$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} \qquad , R_y = \sum_{i=1}^{4} F_y$$

$$R_x = 199{,}1 \qquad ; R_y = 14{,}3 \quad N$$

$$R = \sqrt[2]{R_x^2 + R_y^2} = 199{,}6 \quad N$$

1.13.

$$\bar F_1 = \left|\bar F_1\right| \cdot \bar e_1 \quad ; \quad F_2 = \left|\bar F_2\right| \cdot \bar e_2 \quad ; \quad \bar R = \bar F_1 + \bar F_2$$

$$\bar e_1 = -\cos a_1 \cdot \bar i + \sin a_1 \cdot \bar j$$

$$\bar e_1 = -\frac{25}{65}\bar i + \frac{60}{65}\bar j \quad ; \quad \bar F_1 = -600\bar i + 1440\bar j$$

$$\bar e_2 = \cos a_2 \cdot \bar i + \sin a_2 \cdot \bar j$$

$$\bar e_2 = \frac{75}{85}\bar i + \frac{40}{85}\bar j \quad ; \quad F_2 = 1200\bar i + 640\bar j$$

$$F_{1x} = \bar F_1 \cdot \bar e_x \quad ; \quad F_{1y} = \bar F_1 \cdot \bar e_y$$

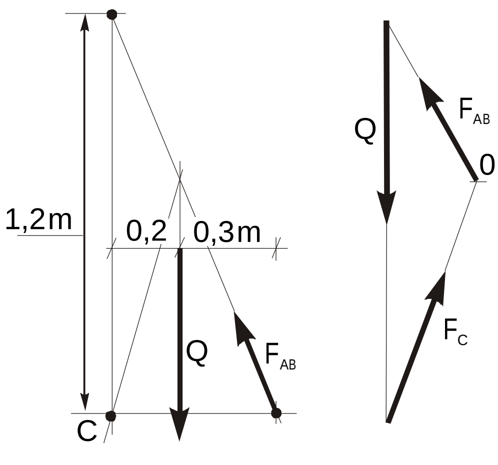
$$F_{2x} = \bar F_2 \cdot \bar e_x \quad ; \quad F_{2y} = \bar F_2 \cdot \bar e_y$$

$$\bar e_x = 1\bar i + 0\bar j \quad ; \quad e_y = 0\bar i + 1\bar j$$

$$F_{1x} = 600 \quad N \qquad F_{1y} = 1440 \quad N$$

$$F_{2x} = 1200\, N \qquad F_{2y} = 640 \quad N$$

1.14.



1.14.

Három közös metszéspontú egyensúlyt tartó erő, melyeknek egységvektorai a geometriából felírhatók:

$$\bar e_A = -\frac{0{,}5}{1{,}3}\bar i + \frac{1{,}2}{1{,}3}\bar j$$

$$\bar F_A = \left|F_A\right| \cdot \bar e_{AB}$$

$$\bar F_A = -250\bar i + 600\bar j$$

$$F_{AX} = 250 \quad N$$

$$F_{AY} = 600 \quad N$$

A $\bar C$ - $\bar B$ rúdra ható erők egyensúlyát számoljuk. (Az A és B csuklókra a kapott értékekkel ellentétesek hatnak.)

$$\bar e_c = \frac{0{,}2}{0{,}75}\bar i + \frac{0{,}72}{0{,}75}\bar j \qquad \bar F_c = \left|\bar F_c\right| \cdot \bar e_c \quad \text{és} \quad \bar Q = \left|\bar Q\right| \cdot \bar l_Q$$

$$\bar e_Q = 0\bar i - 1\bar j \qquad \bar 0 = \bar F_A + \bar F_c + \bar Q$$

$$\bar 0 = \left(-250\bar i + 600\bar j\right) + \left(\frac{0{,}2}{0{,}75}\left|\bar F_c\right|\bar i + \frac{0{,}72}{0{,}75}\left|\bar F_c\right|\bar j\right) + \left(0\bar i - \left|\bar Q\right|\bar j\right) / .\bar j; \bar i$$

$$I. \quad -250 + \frac{0{,}2}{0{,}75}\left|\bar F_c\right| = 0 \quad \rightarrow \left|\bar F_c\right| = 250 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}2} \cong 937{,}5N$$

$$II. \; +600 + \frac{0{,}72}{0{,}75}\left|\bar F_c\right| - \left|\bar Q\right| = 0 \quad \rightarrow \quad \left|\bar Q\right| = 1500 \quad (N)$$

$$\bar F_c = 250\bar i + 900\bar j \qquad \bar Q = 0\bar i - 1500\bar j$$

Vagy a vektorrendszerek egyenértékűsége alapján, „C”-re felírva a nyomatékvektorokat:

$$\sum \overline{M}_c = \overline{0} = \bar{r}_{CB} \times \overline{F}_A - \bar{r}_Q \times \overline{Q}$$

Determinánsként felírva

$$\bar{r}_{CB} \times \overline{F}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 250 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (-300 - 0)\bar{k} = -300 \quad \bar{k}$$

$$\bar{r}_Q \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ |\overline{Q}| & |\overline{Q}| & 0 \end{vmatrix} = -0{,}2 \cdot |\overline{Q}| - \bar{k}$$

$$\overline{Q} = -300\bar{k} + 0{,}2|\overline{Q}|\bar{k} \qquad /\cdot \bar{k}$$

$$0 = -300\bar{k} + 0{,}2|\overline{Q}|$$

$$|\overline{Q}| = \frac{300}{0{,}2} = 1500 \quad N$$

1.15.

Határozzuk meg először az eredőt!

$$\overline{F}_1 = 0\bar{i} - 400\bar{j} \quad \overline{F}_2 = 100\bar{i} + 0\bar{j}; \quad \overline{F}_3 = -100\bar{i} + 173{,}2 \quad \bar{j}$$

$$\overline{R} = -226{,}79\bar{j} \quad N$$

$$R_1 = \overline{R} \cdot \bar{e}_1 = -113{,}4 \quad N$$

$$R_2 = \overline{R} \cdot \bar{e}_2 = -196{,}4 \quad N$$

1.16.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \quad |\bar{i}|\bar{j}$$

$$0 = F_1 + X_2 - F_3$$

$$-R = -Y_2$$

$$\overline{F}_2 = |\overline{F}_2| \cdot \bar{e}_2 = 0{,}6 \cdot F_2\bar{i} - 0{,}8F_2\bar{j}$$

$$Y_2 = 4 \quad kN \quad \rightarrow \quad F_2 = \frac{4}{0{,}8} = 5 \quad kN$$

$$F_3 = F_1 + X_2 = 6 + 0{,}6 \cdot 5 = 8 \quad kN$$

1.17.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

$$\overline{R} = 365\bar{i} - 160\bar{j}$$

$$|\overline{R}| \cong 398{,}5N$$

Skalárisan megoldva:

$$F_{1x} = 660 \quad N \quad \rightarrow \qquad F_{1y} = 540 \quad N \quad \uparrow$$
$$F_{2x} = 520 \quad N \quad \leftarrow \qquad F_{2y} = 300 \quad N \quad \downarrow$$
$$F_{3x} = 225 \quad N \quad \rightarrow \qquad F_{3y} = 400 \quad N \quad \downarrow$$
$$R_x = \sum F_x = 365 \rightarrow \quad R_y = \sum F_y = -160 \; N \downarrow$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} \cong \quad 400 \quad N$$
$$arctga_R = \frac{160}{365} \cong 23{,}7^0$$

1.18.

Ebben az esetben nincs az eredőnek lejtőre merőleges összetevője.

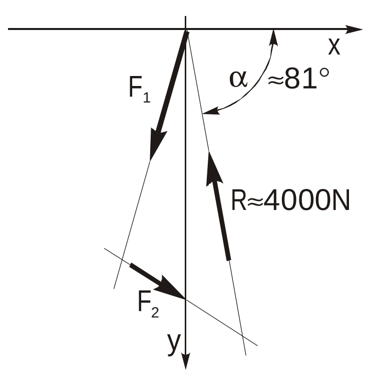
$$\left|\overline{F}_{12}\right| = 2\left|\overline{F}_1\right| \cos 20°$$
$$F_1 \cdot \sin a + F_2 \cdot \sin\left(a + 40^0\right) - F_3 \cdot \sin 30^0 = 0$$
$$300 \cdot \sin a + 300 \cdot \sin\left(a + 40^0\right) - 250 = 0$$

Célszerűbb előbb az F_1 *és* F_2 erők eredőjét megkeresni.

$$\left|F_{1,2}\right| = 563{,}8 \quad N$$
$$563{,}8 \cdot \sin\left(a + 20^0\right) = 250$$
$$a \cong 6{,}3^0$$

1.19.

$$\overline{F}_1 = \left|\overline{F}_1\right| \sin 15^0 \,\overline{i} + \left|\overline{F}_1\right| \cdot \cos 15^0 \,\overline{j} = 647\overline{i} + 2414{,}8\,\overline{j}$$
$$F_2 = \left|\overline{F}_2\right| \cdot \sin 40^0 \,\overline{i} + \left|\overline{F}_2\right| \cdot \cos 40^0 \,\overline{j} = 1285{,}6\overline{i} + 1532{,}1\,\overline{j}$$
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 638{,}5\overline{i} + 3946{,}9\,\overline{j}$$
$$\left|\overline{R}\right| = 3998{,}2\,N$$



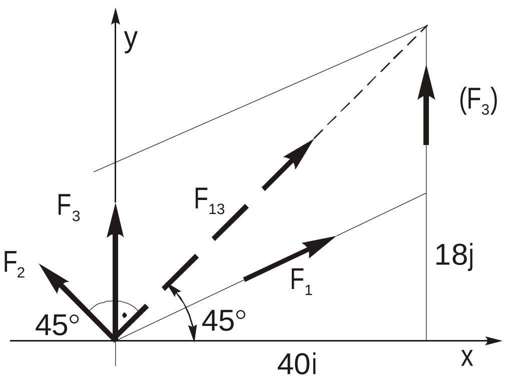
1.19.

1.20.

$$\bar{F}_{1,3} = \bar{F}_1 + \bar{F}_3 = 40\bar{i} + (18 + F_3)\bar{j}$$

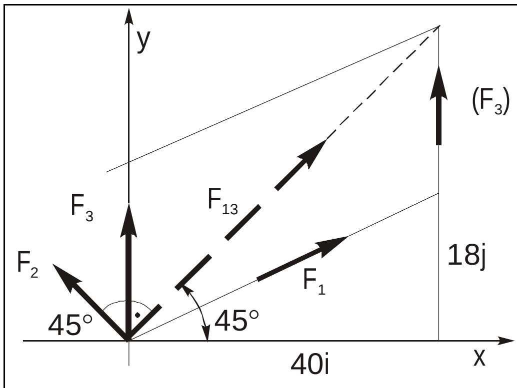
$$\bar{F}_{1,3} \cdot \bar{F}_2 = 0$$

$$|\bar{F}_3| = 22 \quad kN$$



1.20.

1.21.



1.20.

A határvonalak – így az erő egységvektorai – ismeretében a három erő egyensúlyából:

$$\bar{F}_A = 1{,}15\bar{i} + 6\bar{j} \quad [kN]$$

$$\bar{F}_B = -1{,}15\bar{i} - 2\bar{j} \quad [kN]$$

Skalárisan számítva:

$$\sum M_A = 0 - ból \quad F_{By} = 2 \quad kN \downarrow$$

$$\text{tg } 30^o = \frac{F_{xB}}{2} \quad F_{Bx} = 1.15 \quad kN \leftarrow$$

$$F_B = 2{,}3 \quad (kN)$$

$$M_B = 0 - ból \quad F_{Ay} = 6 \quad kN \uparrow \quad \sum F_{xi} = 0 - ból \quad F_{Ax} = 1{,}15 \quad kN \rightarrow$$

$$F_A = 6{,}1 \quad kN \quad a_{FA} = 79{,}15^o$$

1.22.

$$\sum_{(A)} M_i = 0{,}5F_B - 120 \cdot 0{,}2 = 0$$

$$\bar{F}_B = 48\bar{j} \quad N$$

$$\bar{F}_A = 72\bar{i} + 48\bar{j} \quad N$$

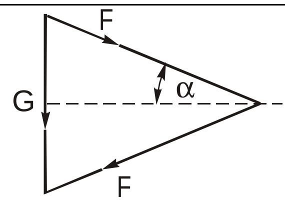
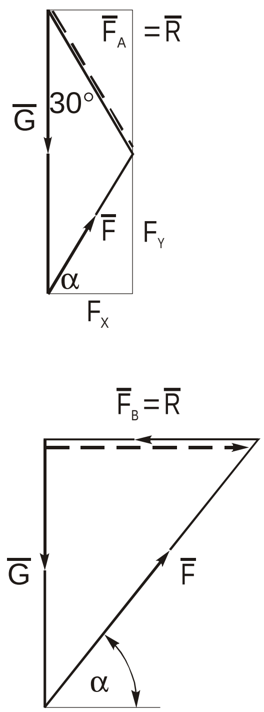
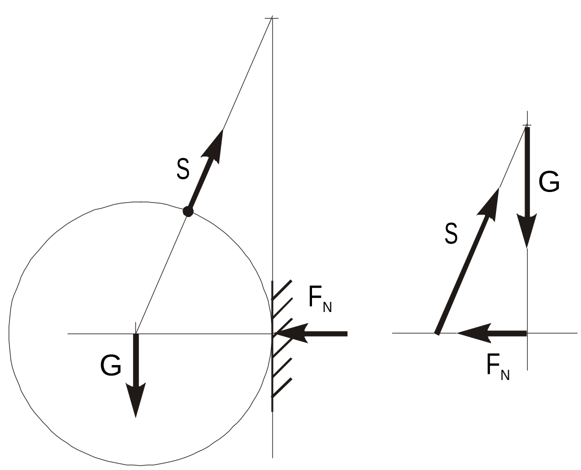
1.23.

$$X = 300 - 400 \cdot \sin 30^0 - 200 \cdot \sin 30^0 = 0$$

$$Y = 400 \cdot \cos 30^0 - 200 \cdot \cos 30^0 - 173{,}2 = 0$$

Tehát egyensúlyi erőrendszer.

1.24.

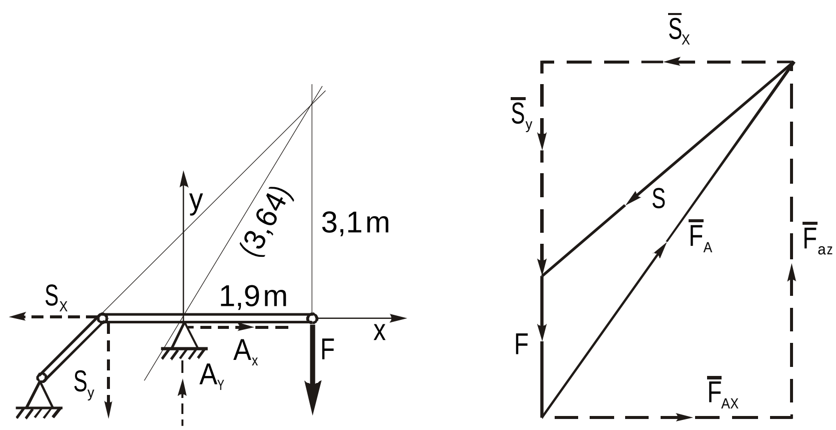
 1.24.	$\sin a = \frac{\frac{G}{2}}{F}$ $a = 22{,}6^o$ $l = 2 \cdot \frac{1{,}8}{\cos a} = 3{,}9 \quad m$
1.25.  1.25.	A két határeset van. Az első esetben: $F_B = 0$ $\sum Y_i = F_A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F \cdot \frac{4}{5} - 120 = 0$ $\sum X_i - \frac{F_A}{2} + F \cdot \frac{3}{5} = 0$ $F_A = \frac{6}{5} F \quad ; \quad F_{MIN} = 65{,}2 \quad N$ A második esetben: $F_A = 0 \rightarrow F_{MAX} = 150 \quad N$
 1.26.	$F_N = 83{,}3\ N$ $S = 216{,}7\ N$

1.27.

$$\sum X_i = 0 = F_1 + F_3 \cdot \cos 30^0 - F_4$$
$$\sum Y_i = 0 = -F_2 + F_3 \cdot \sin 30^0$$
$$1 + F_3 \frac{\sqrt{3}}{2} - F_4 = 0$$
$$-2 + F_3 \frac{1}{2} = 0$$
$$F_3 = 4 \quad kN \quad ; \quad F_4 = 4{,}46 \quad kN$$

1.28.

$$\sum M_A = -8 \cdot 1{,}9 + S_y \cdot 1{,}2 = 0$$
$$S_y = 12{,}67\ kN \downarrow$$
$$S_x = 12{,}67 \leftarrow kN \quad S = 17{,}91\ kN$$
$$\sum Y_i = 0 - ból \qquad F_{AY} = 20{,}67\ kN \uparrow$$
$$\sum X_i = 0 - ból \qquad F_{Ax} = 12{,}67\ kN \rightarrow$$
$$F_A = 24{,}24\ kN$$



1.28.

1.29.

$$\sum X = 0 = -F_1 \cdot \sin 30° - F_2 \cdot \sin 30° + Q_x$$
$$\sum Y = 0 = -F_1 \cdot \cos 30° + F_2 \cdot \cos 30° + Q_y$$

$$\overline{Q} = 400\bar{i} - 400\bar{j} \quad N$$

1.30.

$$\overline{F}_A = -20\bar{i} - 20\bar{j} \quad N$$
$$\overline{F}_B = 20\bar{j} \quad N$$

1.31.

$$\overline{M}_A = \overline{r}_p \times \overline{F}$$
$$M_z = \overline{M}_A \cdot \overline{k}$$
$$\overline{M}_A = \left(4\overline{i} + \overline{j}\right) \times \left(-4\overline{i} + 2\overline{j}\right) = 8 - (-4) = 12 \quad \overline{k} \quad kNm$$
$$M_z = 12 \quad kNm$$

1.32.

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = -20\overline{i} - 25\overline{j} \quad kN$$
$$\overline{M}_A = 0 + 72\overline{k} - 60\overline{k} - 12\overline{k} = 0\overline{k}$$
$$\overline{r}_{BC} = [1;7] \qquad \overline{r}_{CA} = [-3;1]$$
$$\overline{M}_C = 23\overline{k} + 84\overline{k} + 0 - 12 = 95\overline{k}$$
$$\left[\overline{F};\overline{M}\right]_A = \left[-20\overline{i} - 25\overline{j} \quad ; \quad 0\overline{k}\right]$$
$$\left[\overline{F};\overline{M}\right]_C = \left[-20\overline{i} - 25\overline{j} \quad ; \quad 95\overline{k}\right]$$

1.33.

$$\overline{F} = \sum_{n=1}^{3} \overline{F}_n = \left(1\overline{i} + 2\overline{j}\right) kN$$
$$\overline{M}_o = \sum_{n=1}^{3} \overline{r}_n x \overline{F}_n = (8-6) + (0-6) + (32-0) = 28\overline{k} \quad kNm$$
$$\overline{M}_0 - \overline{r} \times \overline{F} = \overline{0}$$
$$28 + y - 2x = 0$$

1.34.

$$\overline{M}_A = \sum_{i=1}^{4} \overline{r}_i x \overline{F}_i$$
$$\overline{F}_3 = -4\overline{j} \quad kN$$
$$-14 = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 8 + 3 \cdot F_3 + 6 \cdot 3$$
$$\left|\overline{F}_3\right| = 4kN$$

1.35.

A megoszló erőrendszer helyettesíthető eredőjének a súlypontba való helyezésével!

$$\overline{F}(A) = \overline{F}_0 + \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$
$$\left|\overline{F}_1\right| = p_1 \cdot 6 = 18 \quad N$$
$$\left|\overline{F}_2\right| = p_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5 \quad N \quad ; \quad \left|\overline{F}_3\right| = p_2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -6 \quad N$$
$$\overline{F}(A) = -3\overline{j} + 18\overline{j} - 1{,}5\overline{j} - 6\overline{j} = 10{,}5\overline{j}$$
$$\overline{M}_A = \sum_{i=0}^{3} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$$
$$\overline{M}_A = \left(-8 \cdot 3 + 18 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 6{,}3 - 6 \cdot 8{,}3\right)\overline{k} = -10{,}4 \quad \overline{k} \quad kNm$$

A centrális egyenes helye: r_{0A}

$$\bar{0} = \bar{M}_A - \bar{r}_{0A} \times \bar{F}_A \qquad \left(\bar{r}_{0A} = x_0 \bar{i} - y_0 \bar{j}\right)$$

$$\left(\bar{r}_{0A} = x_{oA} \bar{i} - y_{0A} \bar{j}\right)$$

$$x_0 = -1 \quad (m)$$

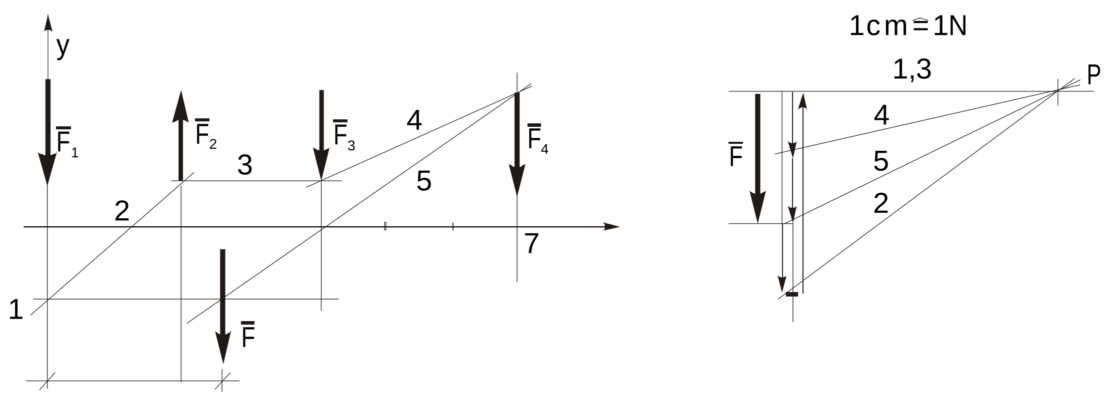
1.36.

$$\bar{F}(0) = -4\bar{j} \quad N$$

$$\bar{M}_0 = (20 - 20 + 28)\bar{i} = 28\bar{i} \ \ Nm$$

$$\bar{r}_p = 7\bar{k} \quad m$$

1.37.



1.37.

1.38.

Irjuk fel először az erőket vektoros alakban.

$F_{1x} = 51{,}96 \quad kN \ \leftarrow \qquad F_{1y} = 30 \quad kN \ \downarrow$

$F_{2x} = 9{,}8 \quad kN \ \leftarrow \qquad F_{2y} = 36{,}7 \ kN \ \downarrow$

$F_{3x} = 31{,}4 \quad kN \ \rightarrow \qquad F_{3y} = 26{,}35 \ kN \ \downarrow$

$R_x = 30{,}39 \quad kN \ \leftarrow \qquad R_y = 93{,}05 \ kN \ \downarrow$

$R = 97{,}89 \quad kN$

$\bar{M}_0 = 101{,}83\bar{k} \ \ kNm$

$x_R = -1{,}09$

$y_R = 3{,}35$

1.39.

$$\bar{F}_{(A)} = -5\bar{i} - 12\bar{j} \quad kN$$

$$\bar{M}_A = -70 \quad \bar{k} \quad kNm$$

$$x_R = 5{,}83 \quad m \quad ; \quad y_R = -14 \quad m$$

1.40.

A lemezt terhelő nyomaték összeg:

$M_{össz} = 6 \cdot 4 = 24 \quad Nm$

Az erőpár nyomatéka alapján

$$\left|\overline{F}_A\right| = \left|\overline{F}_C\right| = \frac{M_ö}{r_{AC}} = 80 \quad N$$

$$\left|\overline{F}_A\right| = \left|\overline{F}_D\right| = \frac{M_ö}{r_{AD}} = 64 \quad N$$

1.41.

Az egyensúlyban lévő erőrendszer nyomatéka a sík bármely pontjára zérus. Írjunk fel a nyomatékot az F_3 erő támadáspontjára.

$$\sum M_{Ai} = -F_1 \cdot 3 - M + F_2 \cdot 10 = 0$$

$$F_2 = \frac{9+6}{10} = 1{,}5 \quad kN \quad \uparrow$$

$$\sum X_i = 3 - X_3 - 0{,}5 = 0$$

$$\sum Y_i = -Y_3 + 1{,}5$$

$$X_3 = 2{,}5 \quad kN \quad ; \quad Y_3 = 1{,}5 \quad kN$$

$$\overline{F}_3 = -2{,}5i - 1{,}5j \quad kN$$

1.42.

Az A pontban ható erők és nyomaték, valamint az $\overline{F}_1, \quad \overline{F}_2, \quad \overline{M}$ egyensúlyi erőrendszert alkot.

$$\sum X_i = F_1 \cdot \cos 30^0 - X_A = 0$$

$$\sum Y_i = -F_1 \cdot \sin 30^0 + F_2 - Y_A = 0$$

$$\sum M_i = Y_1 \cdot 3 - 60 \cdot 1{,}5 - M + M_A = 0$$

$$X_A = 51{,}96 \quad N \quad ; \quad Y_A = 30 \quad N \quad ; \quad M_A = 15 \quad kNm$$

1.43.

Mivel az $\overline{F}_1, \quad \overline{F}_2$ erők erőpárt alkotnak, a támaszerők is erőpárt kell hogy alkossanak!

$$\sum M_{Ai} = -24 + Y_B \cdot 10 = 0$$

$$X_B = Y_B = 2{,}4 \quad kN$$

$$F_A = F_B = \sqrt{2{,}4^2 + 2{,}4^2} = 3{,}394 \quad kN$$

1.44.

$$\sum_{(A)} M_i = F_B \cdot 4 + F_3 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 3 = 0$$

$$F_B = \frac{24+12-10}{4} = 6{,}5 \quad kN$$

$$\sum Y_i = -F_2 + Y_A + F_B = 0$$

$$Y_A = -0{,}5 \quad kN$$

$$\sum X_i = F_1 - F_3 + X_A = 0$$

$$X_A = 3\, kN \quad (\leftarrow)$$

$$F_A = \sqrt{3^2 + 0{,}5^2} = 3{,}04 \quad kN$$

1.45.

$$\sum M_{Bi} = 0 - ból$$

$$0 = F_{Ay} \cdot 10 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot 6 - 6$$

$$\overline{F}_{Ay} = 4{,}2\, j \quad kN \qquad \left|\overline{F}_A\right| = 4{,}2 \quad kN$$

$$\overline{F}_{By} = \overline{F}_2 - \overline{F}_A = 0{,}8\, j \quad kN$$

$$\overline{F}_{Bx} = \overline{F}_1 = -3\bar{i} \quad kN \qquad \left|\overline{F}_B\right| = 3{,}1 \quad kN$$

1.46.

$$\sum M_{Ai} = Y_B 3 - F \cdot 1 + M = 0$$

$$Y_B = 1 \quad kN$$

$$\overline{F}_A = \bar{i} + 5\bar{j} \quad kN$$

$$\overline{F}_B = -\bar{i} + \bar{j} \quad kN$$

1.47.

$$F_{Ax} = 25 \quad N$$

$$F_{Ay} = -43{,}3 \quad N$$

$$M_A = -25 \cdot 0{,}5 + 43{,}3 \cdot 1 = 30{,}8 \quad Nm$$

1.48.

Írjuk fel a nyomatéki egyenletet az A pontra!

$$\sum_{(A)} M_i = -30{,}8 + X_B \cdot 0{,}3 = 0$$

$$X_B = 102{,}66\, N \quad ; \quad Y_B = \sqrt{F_B^2 - X_B^2} = 109{,}37\, N$$

$$X_A = 77{,}66\, N \quad ; \quad Y_A = 66{,}06\, N \quad vagy \quad 152{,}66\, N$$

1.49.

Határozzuk meg előbb a 4 erő eredőjét.

$X_2 = Y_2 = 176{,}77\ N$

$X = -200\ N$

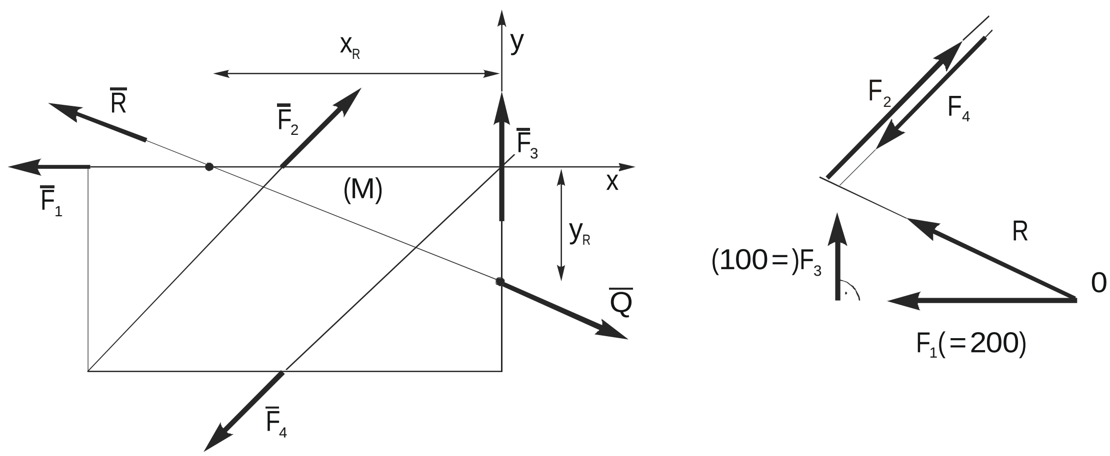
$Y = 100\ N$

$M_c = -26{,}52\ Nm$

$x_R = -265\ mm$

$y_R = -132{,}6\ mm$

Az egyensúlyozó erő az eredővel ellentétes irányú az eredő hatásvonalán.



1.49.

1.50.

A megoszló teher eredőre $\overline{Q} = 6\ kN$ $x_Q = -3\ m$

$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{Q} = -14\overline{j}\ kN$

$x_R \cdot R = F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4 + Q \cdot 3$

$x_R = -4{,}29\ m$

$\overline{M}_A = 60\overline{k}\ kNm$

1.51.

Írjuk fel a nyomatéki egyenletet az 1. pontra.

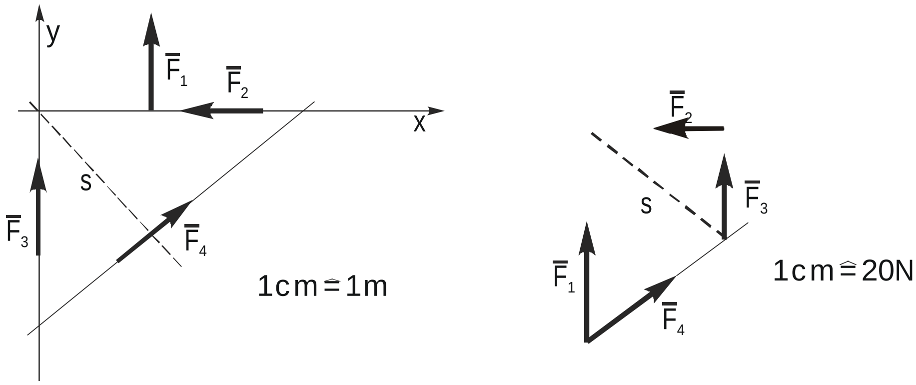
$R \cdot 2 = +M + F_2 \cdot 3 - X_3 \cdot 2$

$-4 = 3 + F_2 \cdot 3 - 2{,}5 \cdot 2$

$F_2 = -\frac{6}{3} = -2\ kN \quad ; \quad \overline{F}_1 = -0{,}5i + 2{,}33\overline{j}$

$-R = -X_1 + X_3$

1.52.



1.52.

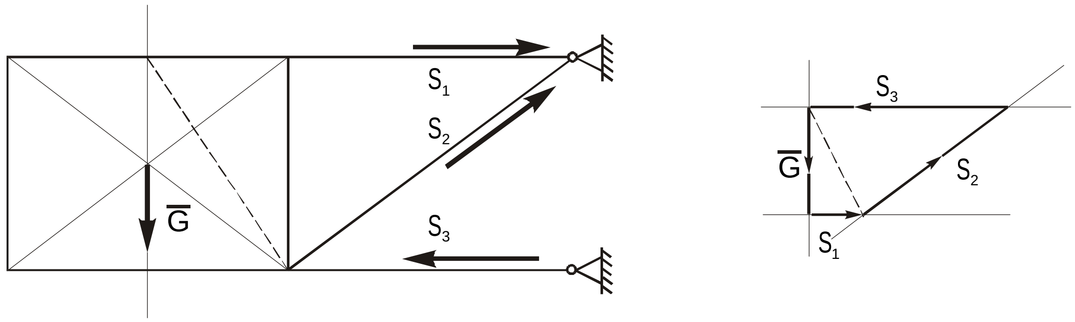
Nyomatéki egyenlet az 0 pontra:
$F_1 \cdot 2 = F_4 \cdot 2{,}4 \quad ; \quad F_4 = 50 \quad N$
Nyomatéki egyenlet a B pontra:
$-F_1 \cdot 2 = -F_3 \cdot 4 \quad ; \quad F_3 = 30 \quad N \uparrow$
Nyomatéki egyenlet az A pontra:
$60 \cdot 2 = F_2 \cdot 3 \quad ; \quad F_2 = 40 \quad N \leftarrow$

1.53.

Nyomatéki egyenlet a C pontra:
$F_1 \cdot 1{,}2 = X \cdot 1{,}2 \quad ; \quad X = 4 \quad kN \quad ; \quad Y = 3 \quad kN$ (az F erő összetevői)
Nyomatéki egyenlet az A pontra:
$Y \cdot 0{,}5 = Y_3 \cdot 1 \quad ; \quad Y_3 = 1{,}5 \quad ; \quad F_3 = 1{,}625 \quad kN$
Nyomatéki egyenlet a B pontra:
$Y \cdot 0{,}5 = Y_2 \cdot 1 \quad ; \quad Y_2 = 1{,}5 \quad kN \quad ; \quad F_2 = 1{,}625 \quad kN$

1.54.

Nyomatéki egyenlet a C pontra:
$G \cdot 2 - S_1 \cdot 3 = 0 \quad ; \quad S_1 = 200 \quad N$
Nyomatéki egyenlet az A pontra:
$G \cdot 6 - S_3 \cdot 3 = 0 \quad ; \quad S_3 = 600 \quad N$
Függőleges vetületi egyenlet:
$Y_2 = G = 300 \quad N \quad ; \quad S_2 = 500 \quad N$



1.54.

1.55.

$\sum Y_i = 0 = F_B - G$

$F_B = 100 \quad N$

Nyomatéki egyenlet az A pontra:

$F_B \cdot 0{,}3 - G \cdot 1{,}15 + F_c \cdot 1{,}1 = 0 \quad ; \quad F_C = F_A = 77{,}27 \quad N$

1.56.

$F_A = 0{,}423\, kN$ (hatásvonala merőleges a talajra)

$F_B = 1\, kN$ (hatásvonal merőleges a tartóra)

$S = 0{,}58\, kN$ (rúderő)

1.57.

Nyomatéki egyenlet az A pontra:

$-S_1 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 8 = 0$

$S_1 = 4{,}4 \quad kN$

$\sum X_i = 0 = X_1 - X_2 = 0$

$X_2 = 3 \quad kN \quad ; \quad F_1 = 4{,}243 \quad kN$

Nyomatéki egyenlet az 1-es és 2-es rúd metszéspontjára:

$8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 8 - S_3 \cdot 10 = 0 \quad ; \quad S_3 = 3{,}6 \quad kN$

1.58.

Nyomatéki egyenlet a C pontra:

$F_A \cdot 2 + M = 0$

$\left|\overline{F}_B\right| = 2{,}5 \quad kN \leftarrow$

$\left|\overline{F}_A\right| = 2{,}5 \quad kN \uparrow$

$\overline{F}_{kötél} \cong 3{,}54 \quad kN$

1.59.

Nyomatéki egyenlet az A pontra:

$F_1 \cdot 4 = 346{,}4 \cdot 2$

$F_1 = 173{,}2 \quad N$

Nyomatéki egyenlet az O pontra:

$F_3 \cdot 2{,}828 = 346{,}4 \cdot 2$

$F_3 = 245 \quad N$

Nyomatéki egyenlet a B pontra:

$F_2 \cdot 4 = 200 \cdot 4 + 346{,}4 \cdot 2$

$F_2 = 373{,}2 \quad N$

1.60.

$F_A = F = 6 \quad N$

$6 \cdot 2 = F_B \cdot 1$

$F_B = F_C = 12 \quad N$

S Z I L Á R D S Á G T A N

10.0 HÚZÁS, NYOMÁS, TISZTA NYIRÁS

10.1.

A csapszeg igénybevétele nyírás, ahol a nyíródó keresztmetszetek nagysága:

A nyírt $=10^2 \cdot \pi \quad \left(\mathrm{mm}^2\right)$

$$\tau=\frac{\mathrm{F}}{2\cdot \mathrm{A}_{\mathrm{ny}}};\quad \tau=\frac{20\cdot 10^3}{2\cdot 10^2\cdot \pi}\frac{[\mathrm{N}]}{\left[\mathrm{mm}^2\right]}\cong 32 \quad \mathrm{MPa}$$

palástnyomás:

$\mathrm{A}=20\cdot 14 \quad \left(\mathrm{mm}^2\right)$ felületen $\quad \sigma_{\mathrm{p}}=71{,}4 \quad \mathrm{MPa}$

$t \ \langle \ t_M$ *és* $s_p \ \langle \ s_{pM}$ tehát a szegecs megfelel!

A lemez igénybevétele húzás; a legjobban igénybevett keresztmetszet:

$\mathrm{A}_{\min}=40\cdot 14-20\cdot 14 \quad (\mathrm{mm}^2)$ az $\varnothing$ 20-as furat „gyengítése” miatt.

$$\sigma_{\max}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}_{\min}};\qquad \sigma_{\max}=71{,}4 \quad \mathrm{MPa}$$

$s_{\max} \ \langle \ s_M$; tehát a lemez is megfelel!

10.2.

$$\Delta l=\frac{F\cdot lo}{A\cdot E};\qquad \Delta l=\frac{180\cdot 10^3\cdot 60}{30^2\cdot 200\cdot 10^3}=0{,}06 \quad mm$$

$$mivel \quad n=\frac{e_{\ker eszt}}{e_{hossz}}=\frac{\dfrac{\Delta a}{a_0}}{\dfrac{\Delta l}{l_0}}$$

$$\Delta a=-a\cdot n\cdot\frac{\Delta l}{lo};\qquad \Delta a=0{,}009 \quad mm$$

$$s_x=\frac{F}{A}=\frac{180\cdot 10^3}{30^2}=200 \quad MPa$$

$\tau_\alpha=\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{x}}\cdot\sin 2\alpha \quad -$ az α síkban ébredő nyírófeszültség

$\sigma_\alpha=\sigma_{\mathrm{x}}\cdot\cos^2\alpha \quad -$ az α síkra merőlegesen ébredő húzófeszültség

$\sigma_\alpha=150 \quad \mathrm{MPa} \qquad \tau_\alpha=86{,}6 \quad \mathrm{MPa}$

10.3.

Reakcióerők a szerkezet egyensúlyából, az A pontra felírt nyomatéki Egyenlet alapján:

$$\sum M_A = 80\cdot 3 + 30\cdot 4 - F_B\cdot 6 = 0 - \text{ból} \quad F_B = 60 \quad \text{kN}\uparrow$$

$$\text{és} \quad \sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{alapján} \quad F_{Ax} = 30 \quad \text{kN}\leftarrow \qquad F_{Ay} = 20 \quad \text{kN}\uparrow$$

S_{AB} rúderő a „B” csomópont egyensúlyából:

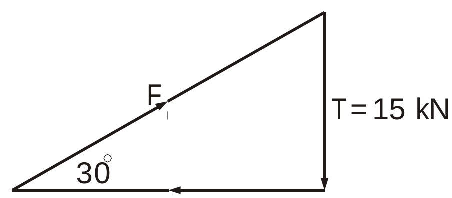
$$\frac{F_B}{S_{AB}} = \frac{4}{3} \qquad S_{AB} = 45 \quad \text{kN} \quad \text{húzott rúd}$$

$$\sigma = \frac{S_{AB}}{A_{AB}}; \qquad \sigma = 99{,}5 \quad \text{MPa}$$

$$\Delta l = \frac{S_{AB}\cdot l}{A_{AB}\cdot E} \qquad \Delta l = 2{,}84 \quad \text{mm}$$

10.4.

A terhelő erő (T) támadáspontjánál lévő csomópontban:



10.4

$$F = 30 \quad kN; \qquad s = \frac{F}{A_L}; \qquad s = 62{,}5 \quad MPa$$

$$A_L = 480 \quad mm^2$$

$$\Delta l = \frac{F\cdot l}{A_L\cdot E}; \qquad \Delta l = 0{,}9 \quad mm$$

$$F = \frac{3}{5}\cdot F_{AC}$$

10.5.

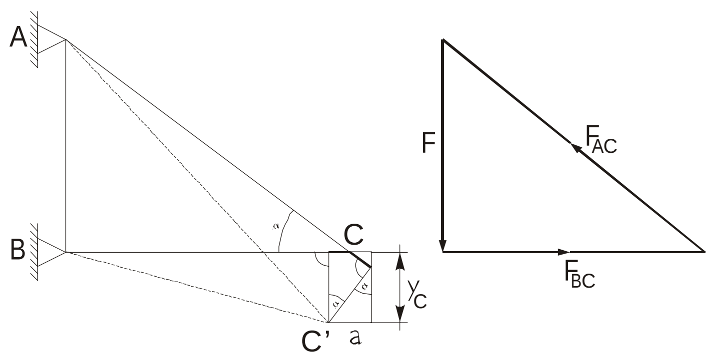
$$s_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}}; \qquad F_{AC} = 37{,}68 \quad kN; \qquad\qquad F = 22{,}6 \quad kN$$

$$F_{BC} = 30{,}14 \quad kN \qquad \Delta l_{AC} = \frac{F_{BC} \cdot l_{BC}}{A_{BC} \cdot E} = -3{,}35 \quad mm \quad \textit{összenyomódás}$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{F_{AC} \cdot l_{AC}}{A_{AC} \cdot E} = 3 \quad mm \quad \textit{megnyúlás}$$

„C” függőleges elmozdulása a rúdhosszak megváltozásával:

$$a = \Delta l_{BC} + \Delta l_{AC} \cdot \cos\alpha$$
$$y_c = a \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + \Delta l_{AC} \cdot \sin\alpha$$



10.5

$$y_c = \left(3{,}35 + 3 \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 9{,}47 \quad \mathrm{mm}$$

10.6.

$F_{nyíró} = t \cdot A_{nyirt}$

A_{nyirt}= lemez kerület . vastagság = 5244 mm

$F_{ny} \cong 1573 \quad \mathrm{kN}$

10.7.

A rúd teljes alakváltozása:

$\Delta l = \alpha(l_1 + l_2) \cdot \Delta t = 0{,}072 \quad \mathrm{mm}$

A rúdban nyomóerő ébred, mivel ezt a Δl -t „nem tudja megnyúlni”.

$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$

$$\frac{F \cdot l_1}{A_1 \cdot E} + \frac{F \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = 0{,}072; \qquad F = 12{,}57 \quad kN$$

A nyomófeszültségek:

$$\sigma_A = \frac{F}{A_1} \qquad \sigma_A = 160 \quad MPa$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A_2} \qquad \sigma_B = 40 \quad MPa$$

10.8.

Fej méretezése a nyomó igénybevétel alapján:

$$\sigma_{PM} \geq \sigma_{max} = \frac{F}{A_{nyomott}}$$

$$A_{nyomott} = \left(50 \quad mm^2\right) = \frac{D^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4} \qquad D = 14{,}41 \quad mm$$

Fejmagasság a nyíró igénybevétel alapján:

$$\tau_M \geq \tau_{max} = \frac{F}{A_{nyirt}} \qquad A_{nyírt} = d \cdot \pi \cdot m = 172{,}4\ mm^2 \qquad m = 4{,}57 \quad mm$$

A szár húzásra van igénybe véve:

$$s_{max} = \frac{F}{A_{szár}} \qquad s_{max} = 88{,}4 \quad MPa \quad \langle s_M, \quad \text{megfelel.}$$

10.9.

$$t_{max} \leq \quad t_M \quad \text{alapján} \qquad n = \frac{F}{\tau_M \cdot 2 \cdot A_{csav}}$$

Egy-egy csavar kétszeresen nyírt !
N = 9,95 ≈ 10 db szükséges.

$$\sigma_u = \frac{F}{2 \cdot A_u} \qquad A_u = 1700 - 2 \cdot 7 \cdot 16 = 1476 \quad mm^2$$

$\sigma_u = 135 \quad MPa \quad \langle \quad \sigma_M$, megfelel!

Egyenletes feszültségelosztást feltételezve palástnyomásra is megfelel.

10.10.

$$m_F = \rho \cdot \frac{4R^3\pi}{3}; \qquad G_F = m \cdot g$$

$$G_F = 5{,}9 \cdot 10^{25} \quad N \qquad \sigma_M \quad \leq \quad \frac{G}{\frac{d_{min}^2\pi}{4}} \qquad d_{min} \cong 5{,}5 \cdot 10^5 \quad km$$

Ez kb. 34-szer nagyobb a Föld átmérőjénél!

2.0 KINEMATIKA

2.1.

$$a(t) = 4 \quad m/s^2$$
$$v(t) = v_o + a \cdot t = 8 + 4 \cdot t \quad m/s$$
$$s(t) = s_o + v \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 15 + 8 \cdot t + 2 \cdot t^2 \quad m$$

2.2.

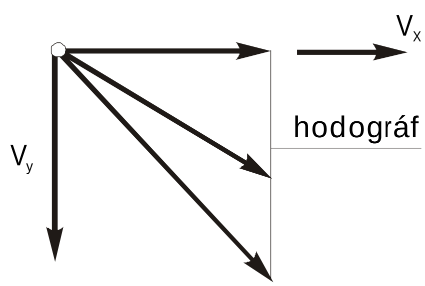
$$a_n = R \cdot w^2 = 1{,}5 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}54 \quad m/s^2$$
$$T = \frac{2Rp}{R \cdot w} = \frac{2p}{w} = 10{,}47 \sec$$
$$n = 60/T = 5{,}73 \quad f\,/\,perc$$
$$s = R \cdot w \cdot t = 1{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 15 = 13{,}5 \quad m$$

2.3.

$$v_o = 200\ km/ó = 55{,}6 \quad m/s$$

A pálya paraméteres egyenlete:

$$x = v_o \cdot t = 55{,}6 \cdot t \qquad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 4.9 \cdot t^2$$

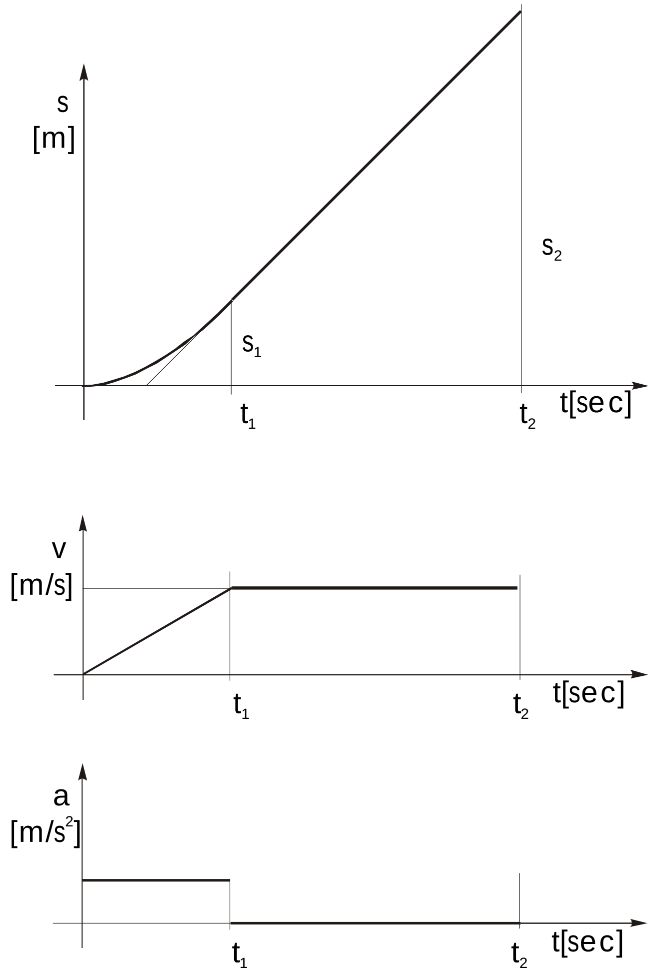


2.3. ábra

$$v_x = v_o = 55.6 \quad m/s$$
$$v_y = g \cdot t = 98{,}1 \quad m/s$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{55{,}6^2 + 98{,}1^2} =$$
$$= 112{,}76 \quad m/s$$

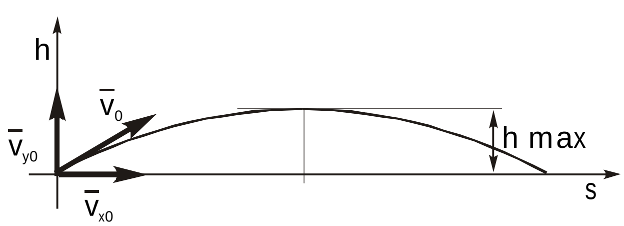
2.4.

$$v(t_1) = a \cdot t_1 = 20 \quad m/s$$
$$t_1 = \frac{20}{1} = 20 \quad \sec$$
$$s_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 = 200 \quad m$$
$$s = s_1 + s_2 = s_1 + v_1 \cdot (t_2 - t_1)$$
$$1000 = 200 + 20 \cdot (t_2 - 20)$$
$$t_2 = \frac{800}{20} + 20 = 60 \quad \sec$$



2.4.ábra

2.5.



2.5. ábra

$\bar{v}_0 = 23\bar{i} + 19{,}26 \quad m/\sec$

Az emelkedés ideje:

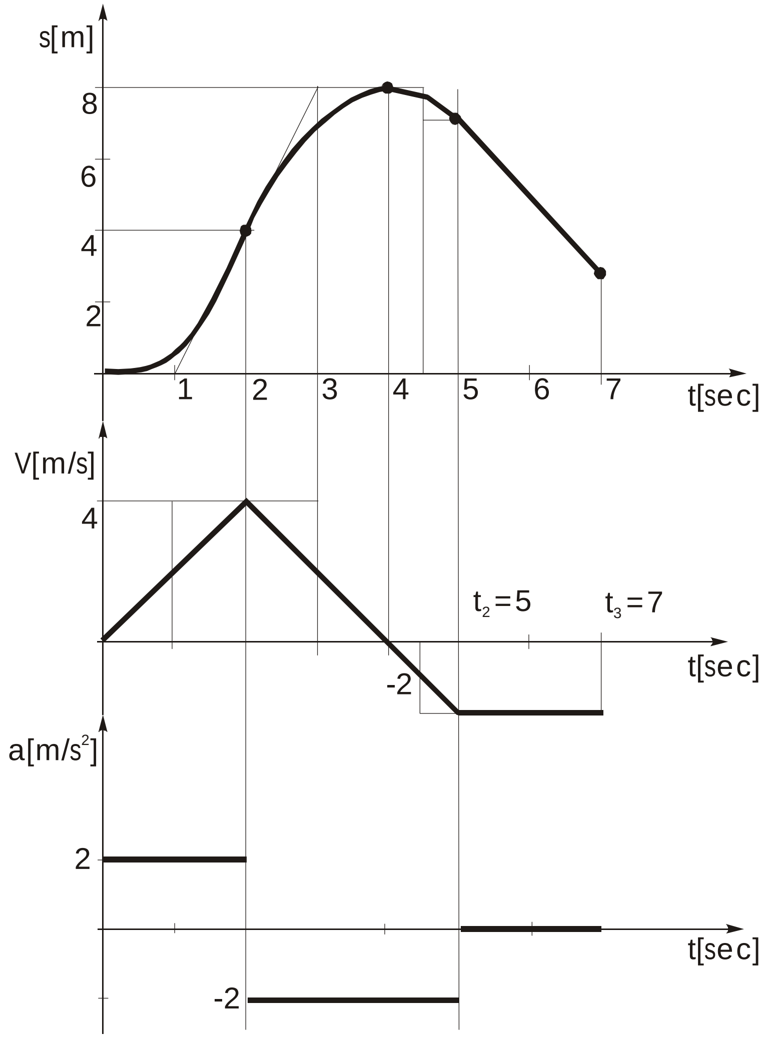
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = 1{,}926 \quad \sec$$

$$v_y = v_{yo} - g \cdot t = 0 \quad ; \quad t_1 = 1{,}93 \quad \sec$$

$$h_{MAX} = v_{y0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 18{,}5 \quad m$$

$$s = 2 \cdot v_{x0} \cdot t_1 = 88{,}8 \quad m$$

2.6.



2.6.

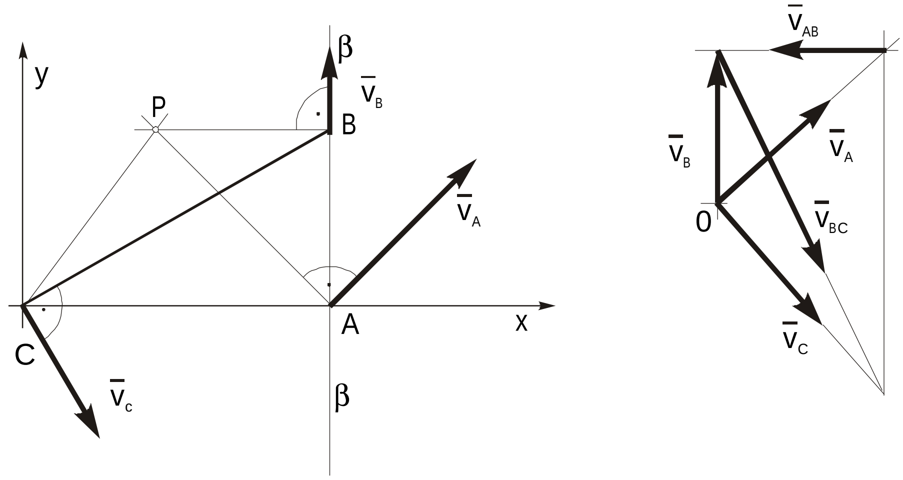
2.7.

$a.)\quad \bar{r}_p = 2\bar{i} + 2\bar{j} \quad m$

$b.)\quad \bar{v}_B = 4\bar{j} \quad m/s$

$\quad \bar{v}_C = 4\bar{i} - 4\bar{j} \quad m/s$

$c.)\quad v = 2\bar{k} \quad 1/s$



2.7. ábra

2.8.

$$v_A = \bar{w}_1 x \bar{r}_A = (-2k) x 1{,}5 \bar{j} = 3\bar{i} \quad m/s$$

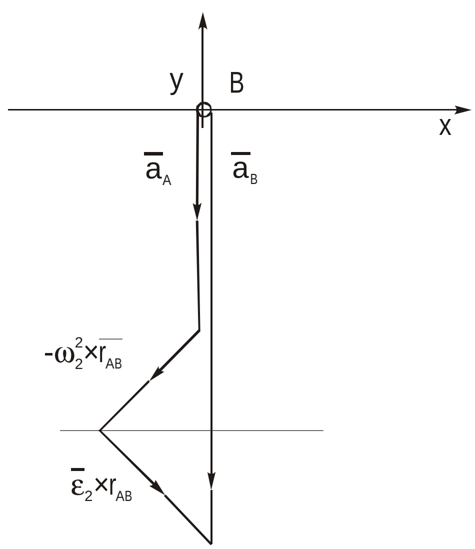
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{w}_2 x \bar{r}_{AB}$$

$$v_B = 3 \quad m/s; \quad w_2 = 1 \quad 1/s; \quad \bar{r}_p = 4{,}5\bar{j} \quad m$$

$$\bar{a}_A = -6\bar{j} \quad m/s^2; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{e}_2 \times \bar{r}_{AB} - w_2^2 \cdot \bar{r}_{AB}$$

$$0 = 0 - 3 \cdot e_2 - 3 \quad ; \quad e_2 = -1\frac{1}{s^2}$$

$$a_B = -6 - 3 - 3 = -12 \quad m/s^2$$



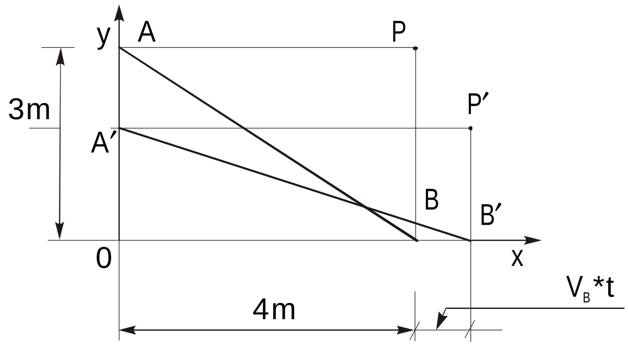
2.8.

$$1cm = 2 \quad m/s^2$$

$$\bar{a}_B = -12\bar{j} \quad [m/s^2]$$

$$e = 1\frac{1}{s^2}$$

2.9.



2.9.

$$v_B \cdot t = 0{,}9 \quad m$$

$$\overline{0A'} = \sqrt{5^2 - 4{,}9^2} = 0{,}995 \quad m$$

$$w = \frac{v_B}{\overline{0A'}} = 0{,}603 \quad \frac{1}{s}$$

$$v_A = w \cdot \overline{A'P'} = 2{,}955 \quad \frac{m}{s}$$

2.10.

a.) A pillanatnyi sebességpólus az A pont.

$$w = \frac{v_0}{R} = 5 \quad 1/s \quad ; \quad v = -5\bar{k} \quad 1/s$$

$$b.) \quad \bar{v}_A = 0; \quad v_B = 20\bar{i} + 20\bar{j} \quad m/s$$

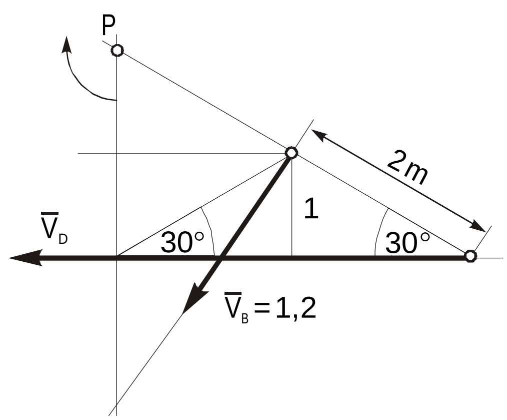
$$\bar{v}_C = 40\bar{i} \quad m/s$$

A gyorsulás pólus a henger középpontja, így :

$$c.) \quad \bar{a}_A = 100\bar{j} m/s; \quad \bar{a}_B = 100\bar{i} \quad m/s$$

$$\bar{a}_C = -100\bar{j} \quad m/s$$

2.11.



2.11.

$$v_B = v_D = 1{,}2 \quad m/s$$

$$v_A = \frac{v_B}{2} \cdot 5 = 3 \quad m/s$$

$$v_A = -1{,}5\bar{i} - 2{,}6\bar{j} \quad m/s$$

2.12.

$$a.)\ w_1 = \frac{2pn}{60} = 2{,}62 \frac{1}{\sec}$$

$$w_2 = \frac{2pn}{60} = 4{,}71 \frac{1}{\sec}$$

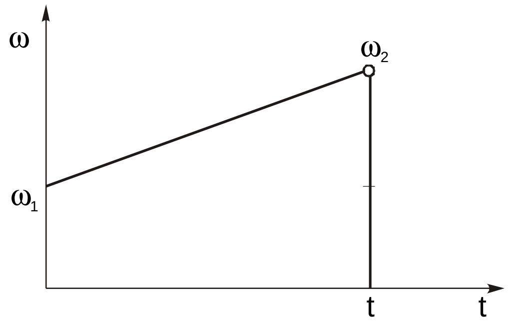
$$j = \frac{w_2 + w_1}{2} \cdot t \quad ; \quad j = 24 \cdot p$$

$$t = \frac{48p}{w_1 + w_2} = 20{,}57 \quad s$$

$$b.)\ v_{g1} = R_d \cdot w_1 = 0{,}3275 \quad m/s$$

$$v_{g2} = R_d \cdot w_2 = 0{,}5888 \quad m/s$$

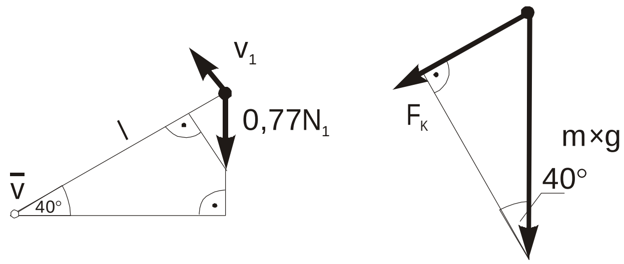
$$a_g = \frac{w_{2g} - w_{1g}}{t} = 0{,}508 \quad 1/s^2$$



2.12.ábra

3.00 KINETIKA

3.1.



3.1. ábra

$F_k = 0$ A fonalerő nulla.

Az impulzus tétel felhasználásával:

$$mg \cdot \sin 40^0 = m \cdot \frac{v_1^2}{l}$$

$$v_1 = \sqrt{l \cdot g \cdot \sin 40^0} = 2{,}777 \quad m/s$$

A munkatétel segítségével:

$$\frac{1}{2} m\left(N_0^2 - N_1^2\right) = m \cdot g \cdot l\left(1 + \sin 40^0\right)$$

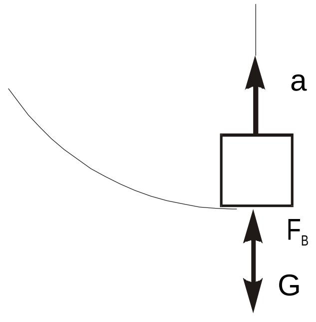
$$v_0 = \sqrt{7{,}71 + 24 \cdot 1{,}64} = 6{,}87 \quad m/s$$

3.2.

Felhasználható a munkatétel, majd pedig az impulzustétel.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_1^2 - v_0^2\right) = G \cdot R; \quad v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = 4{,}47 \quad m/s; \quad a_n = \frac{2 \cdot g \cdot R}{R} = 2 \cdot g$$

$$\bar{N} - \bar{G} = m \cdot \bar{a}_n; \quad F_B = 3 \cdot G = 60 \quad N$$

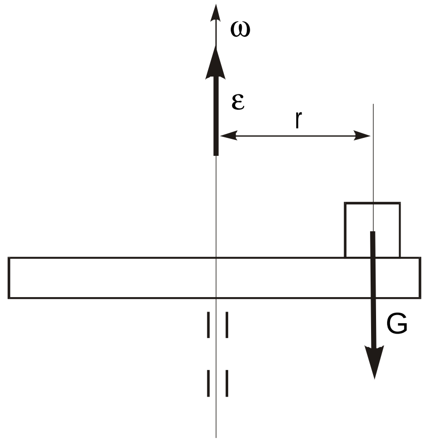


3.2. ábra

3.3.

$$a_t = r \cdot e$$

$$a_n = r \cdot w^2 = r \cdot (e \cdot t)^2$$



3.3. ábra

Az impulzus tétel alkalmazásával:
$m \cdot \bar{a} = \bar{S}$

A súrlódó erő maximális értéke: $m_0 \cdot m \cdot g$

$m \cdot a_n = m \cdot r \cdot (e \cdot t)^2 = S_1; \quad m \cdot a_t = m \cdot e \cdot r = S_2$

$\sqrt{S_1^2 + S_2^2} = m_0 \cdot m \cdot g;$

$r^2 \cdot e^4 \cdot t^4 + e^2 \cdot r^2 = m_0^2 \cdot g^2$

$t = 2{,}78 \quad \text{sec}$

3.4.

Az impulzus tétel felhasználásával:

$$\bar{F} = \sum m_i \cdot \bar{a}$$

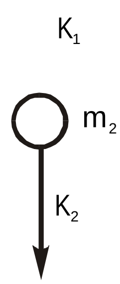
$$a = \frac{240 - 160}{16} = 5 \quad m/s^2$$

$$F - K_1 - G_1 = m_1 \cdot a$$

$$K_1 = (F - G_1) - m_1 \cdot a = 240 = 90 \quad N$$

$$K_2 = m_3 \cdot (g + a) = 60 \quad N$$

<u>Próba:</u>



3.4. ábra

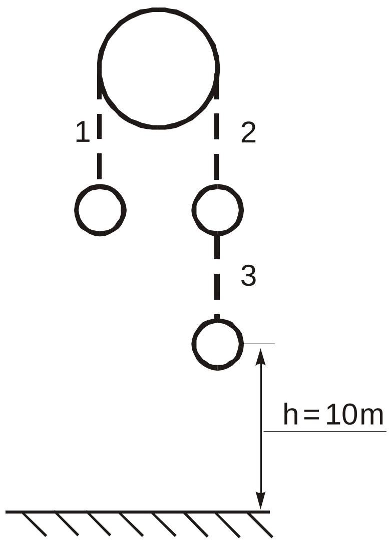
$(K_1 - K_2) = m_2 \cdot a$

$30N = 2 \cdot 15$

3.5.

Az impulzus tétel felhasználásával:
A gyorsító erő: 40 N

$$a = \frac{40}{10} = 4 \quad m/s^2$$

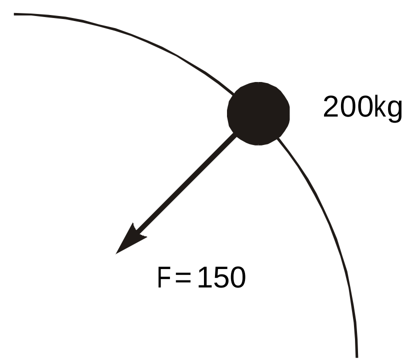


3.5. ábra

$$S_1 - 30 = 12\ N$$
$$S_1 = 42\ N$$
$$S_2 = S_1 = 42\ N$$
$$S_3 = 12\ N$$
$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}} = 2{,}24\ \mathrm{sec}$$

3.6.

$$F = m \cdot \frac{v^2}{l} = m \cdot l \cdot w^2$$
$$w = \sqrt{\frac{F}{m \cdot l}} = 14{,}6 \quad 1/s$$
$$n = \frac{60 \cdot w}{2p} = 139{,}5 \quad f\ /\ p$$



3.6. ábra

3.7.

A perdülettétel felhasználásával :

$$M_A = J_a \cdot a \quad ; \quad M_A = G \cdot \frac{l}{2}$$
$$a = \frac{3 \cdot g}{2 \cdot l} = 12{,}5 \frac{1}{s^2}$$

Impulzus tétel a súlypontra:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}_s$$
$$G - F_A = m \cdot e\ l/2; \qquad F_A = 12{,}5 \quad N$$

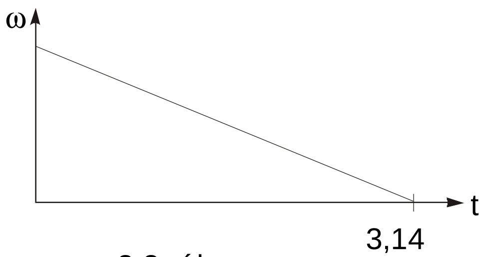
3.8.

A perdülettétel felhasználásával:

$$a)\quad w = \frac{2p \cdot n}{60} = 62{,}83 \quad 1/s$$

$$J_z \cdot e = M_f = F_s \cdot R$$

$$e = \frac{0{,}2 \cdot 500 \cdot 0{,}2}{1} = 20 \quad 1/s^2$$



3.8. ábra

$$t = \frac{w}{e} = 3{,}14 \quad 1/s$$

$$j = 98{,}64 \quad \rightarrow \quad 15{,}7-et \;\; fordul.$$

$$b)\quad e = \frac{m_0 \cdot F_0 \cdot R}{J_z}$$

$$t = \frac{w \cdot J_z}{m_0 \cdot F_0 \cdot R} \rightarrow$$

$$F_0 = \frac{62{,}83}{0{,}2 \cdot 15 \cdot 0{,}2} = 104{,}7 \quad N$$

3.9.

A függőleges kiinduló helyzetben.

$$a_B = \frac{N_{BO}^2}{2R} = 31{,}25 \quad m/s^2$$

Az impulzus tétel alkalmazásával:

$$\bar{F}_A + \bar{G} = m \cdot \bar{a}_s$$

$$F_A = G + ma_s = 20 + 31{,}25 = 51{,}25 \quad N$$

A gyűrű szögsebességét és a szöggyorsulását a munkatétel és perülettétel segítségével határozhatjuk meg.

$$\frac{1}{2} J_a \left(w_1^2 - w_0^2\right) = -mg \cdot R$$

$$J_s = mR^2 = 0{,}78125 \quad kgm^2$$

$$w_1 = 3 \quad m/s$$

$$J_a \cdot a = m \cdot g \cdot R$$

$$e = \frac{g}{2R} = -8 \quad 1/s^2$$

$$\bar{a}_{B'} = 11{,}25i - 10\bar{j} \quad N$$

Az impulzus tétel újbóli alkalmazásával:

$$\bar{F}_A = 11{,}25\bar{i} + 10\bar{j} \quad N$$

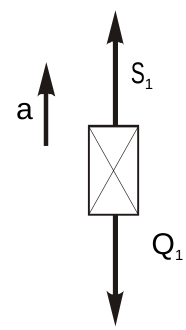
3.10.

a.) A csiga tengelyére felírt perdülettételből:

$$J_z a = (S_1 - S_1) \cdot R$$
$$Q_1 - S_1 = m_1 \cdot a$$
$$S_2 - Q_2 = m_2 \cdot a$$
$$a = \frac{a}{R}$$
$$a = \frac{Q_1 - Q_2}{\frac{Q_1 + Q_2}{g} + \frac{J_Z}{R^2}} = \frac{200}{40 + 5} = 4{,}44 \quad m/s^2$$

b.) Impulzus tétel felhasználásával:

$$\frac{Q_1}{g} \cdot a = Q_1 - S_1$$
$$S_1 = 300 - 133{,}3 = 166{,}8 \quad N$$
$$S_2 = 100 + 44{,}4 = 144{,}4 \quad N$$



3.10. ábra

3.11.

$v_0 = 65km/h = 18{,}06 \quad m/s$

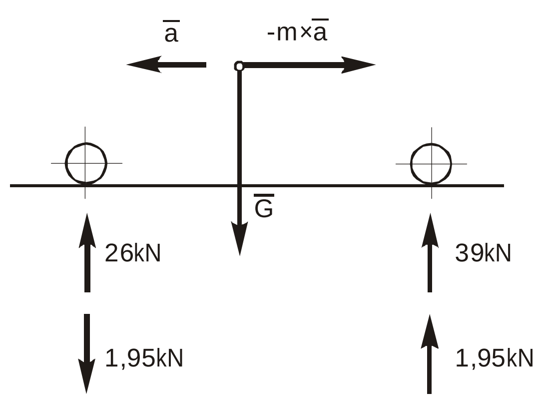
Az impulzus tétel felhasználásával:

$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad m \cdot v_0 = -G \cdot m \cdot t; \quad t = 15{,}34 \quad \sec$

A munkatételből: $-\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = -G \cdot m \cdot s$

$s = 138{,}5 \quad m$

$-m \cdot a = 7{,}8 \quad kN$



3.11. ábra

Az első kerékre 40,95 kN, a hátsó kerékre 24,05 kN erő hat.

3.12.

Alsó helyzetben:

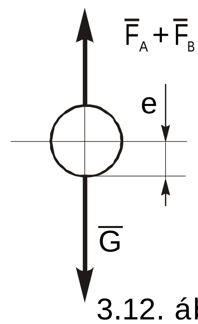
$F_A + F_B - G = m \cdot e \cdot w^2 = 1500\ N$

$F_A + F_B = G + m \cdot e \cdot w^2 = 4500\ N$

Felső helyzetben:

$F_A + F_B = G - m \cdot e \cdot w^2 = 1500\ N$

$F_B = 0{,}5 - 2{,}5\ kN$



3.12. ábra

3.13

a.) Perdülettétel az A pontra:

$F_0 \cdot 2R = J_a \cdot e$

$F_0 = \dfrac{J_a \cdot a_s}{2 \cdot R^2} = 180 \quad N$

$J_a = \dfrac{3}{2} m \cdot R^2 = 0{,}45 \quad kgm^2$

b.) Az impulzus tételből:

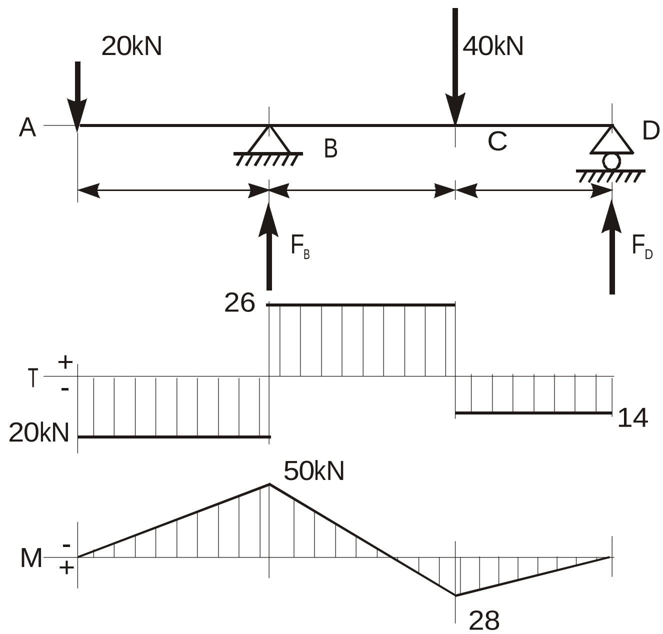
$m\overline{a}_s = \overline{F}_0 + \overline{G} + \overline{F}_A$

$\overline{F}_A = 60\overline{i} + 300\overline{j} \quad N$

c.) $m_0 = \dfrac{60}{300} = 0{,}2$

4.0 EGYENES TENGELYŰ TARTÓK IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI

4.1.



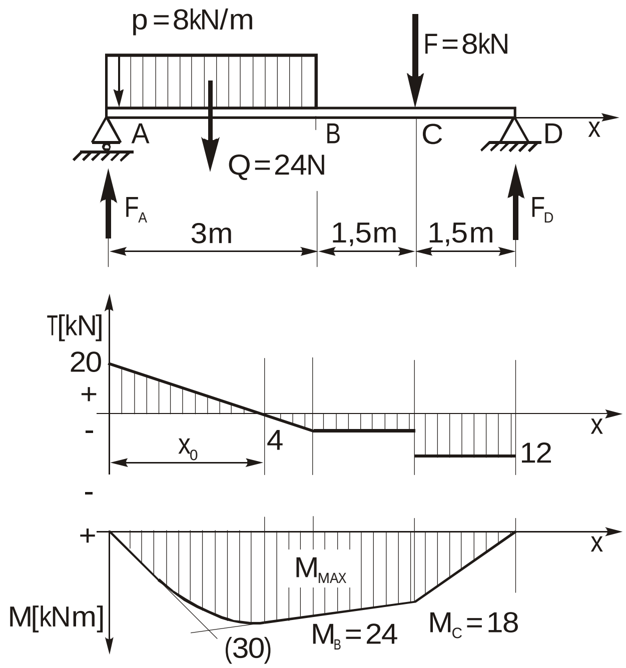
4.1.

$$\sum_{(B)} M_i = F_D \cdot 5 - 40 \cdot 3 + 20 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$F_D = \frac{70}{5} = 14\ kN$$

$$F_B = 46\ kN$$

4.2.



4.2.

$$\sum_{(D)} M_i = -F_A \cdot 6 + 24 \cdot 4{,}5 + 8 \cdot 1{,}5 = 0$$

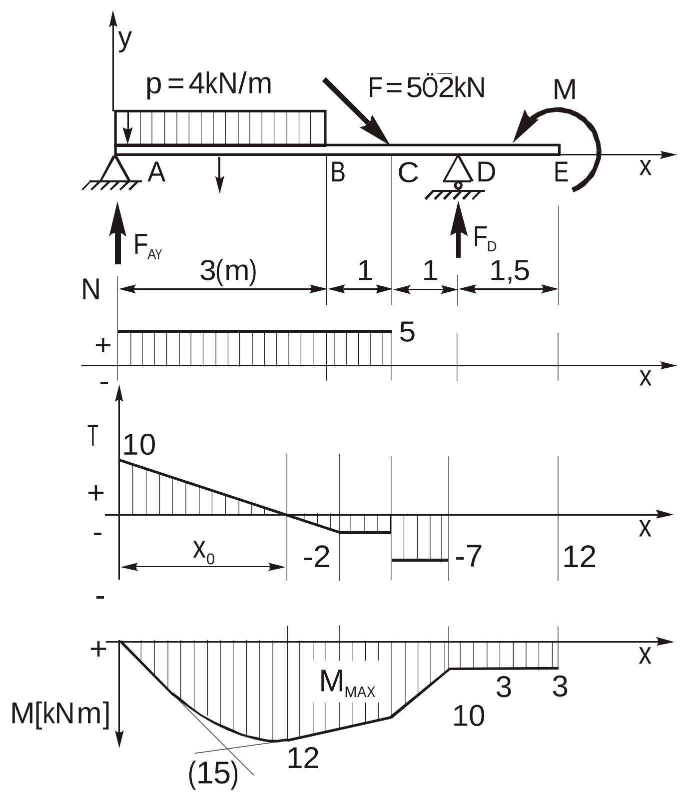
$$F_A = \frac{24 \cdot 4{,}5 + 8 \cdot 1{,}5}{6} = 20\ kN$$

$$\sum Y_i = F_A - Q - 8 + F_D = 0$$

$$F_D = 12\ kN$$

$$X_0 = \frac{F_A}{p} = 2{,}5\ m; \quad M_{MAX} = F_A \cdot X_0 - \frac{p x_0}{2} = 25\ kNm$$

4.3.



4.3.

$$\sum_{(A)} M_i = 3 + F_D \cdot 5 - 5 \cdot 4 - 12 \cdot 1{,}5 = 0$$

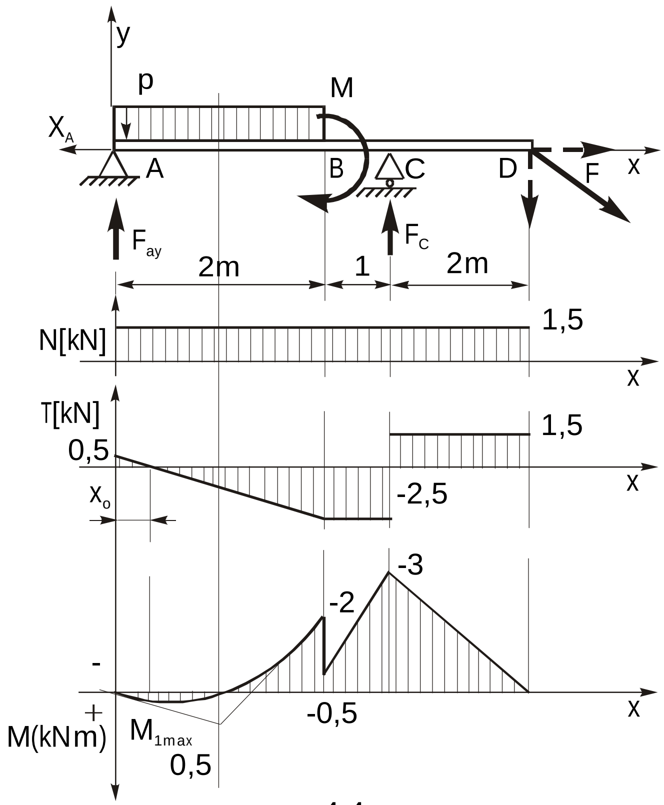
$$F_D = 7\ kN$$

$$\sum Y_i = Y_A - 12 - 5 + F_D = 0$$

$$Y_A = 10\ kN \quad ; \quad X_A = 5\ kN$$

$$X_0 = \frac{F_A}{p} = 2{,}5\ m \quad ; \quad M_{MAX} = 12{,}5\ kNm$$

4.4.



4.4.

$$\sum_{(A)} M_i = -1{,}5 \cdot 5 + F_C \cdot 3 - 1{,}5 - 3 \cdot 1{,}0 = 0$$

$$F_C = 4\ kN$$

$$\sum Y_i = Y_A - 3 + F_C - 1{,}5 = 0$$

$$Y_A = 0{,}5\ kN$$

$$\sum X_i = -X_A + 1{,}5 = 0$$

$$X_A = 1{,}5\ kN$$

4.5.

$$\sum_{(D)} M_i = 12 - 2 + 2 \cdot 4 + 0{,}4 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$F_B = 5{,}4\ kN$$

$$\sum Y_i = F_B - 2 - 12 + F_D = 0$$

$$F_D = 8{,}6\ kN$$

$$X_0 = \frac{3{,}4}{3} = 1{,}33\ m \quad ; \quad M_{MAX} = 10{,}4 + \frac{3 \cdot 1{,}333^2}{2} = 12{,}33\ kNm$$

4.6.

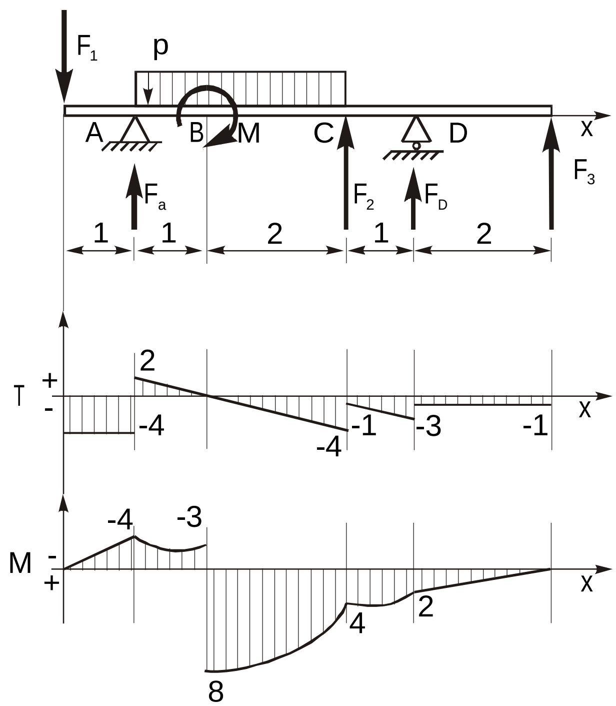
$$\sum_{(E)} M_i = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 7 - F_B \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 0$$

$$F_B = 5\ kN$$

$$\sum Y_i = -4 + F_B - 4 + F_E + 2 = 0$$

$$F_E = 1\ kN$$

4.7.



4.7.

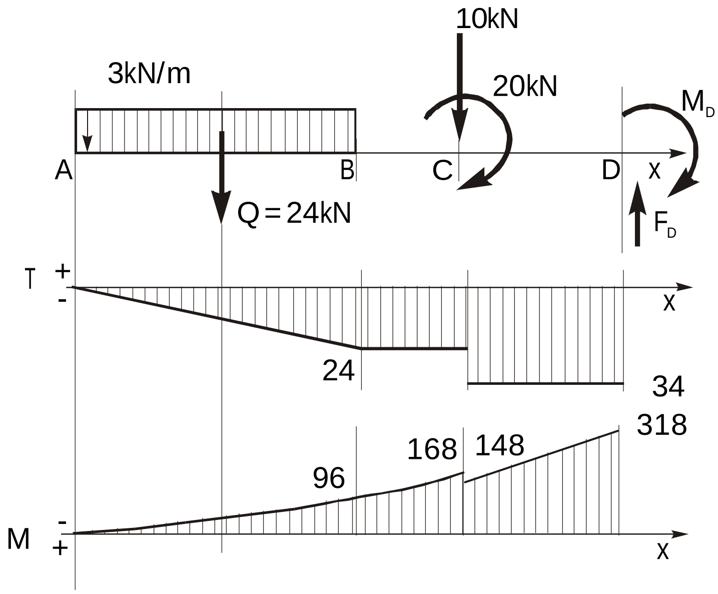
$$\sum_{(A)} M_i = 1 \cdot 6 + F_D \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 11 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$F_D = 2\ kN$$

$$\sum Y_i = -4 + F_A - 8 + 3 + F_D + 1 = 0$$

$$F_A = 6\ kN$$

4.8.



4.8.

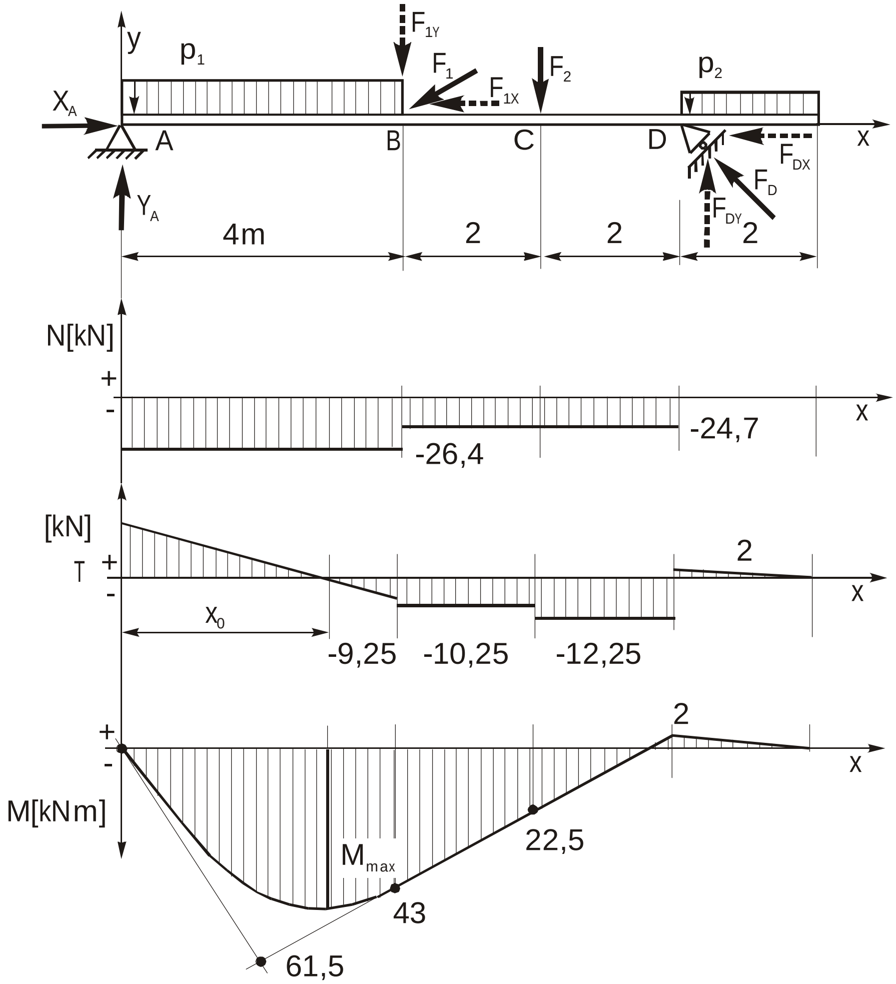
$$\sum Y_i = -24 - 10 + F_D = 0$$

$$F_D = 34\ kN$$

$$\sum_{(D)} M_i = 24 \cdot 12 + 10 \cdot 5 - 20 - M_D = 0$$

$$M_D = 318\ kNm$$

4.9.



4.9.

$$\sum_{(A)} M_i = Y_D \cdot 8 - 40 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 0$$

$$Y_D = 14{,}25 \quad kN$$

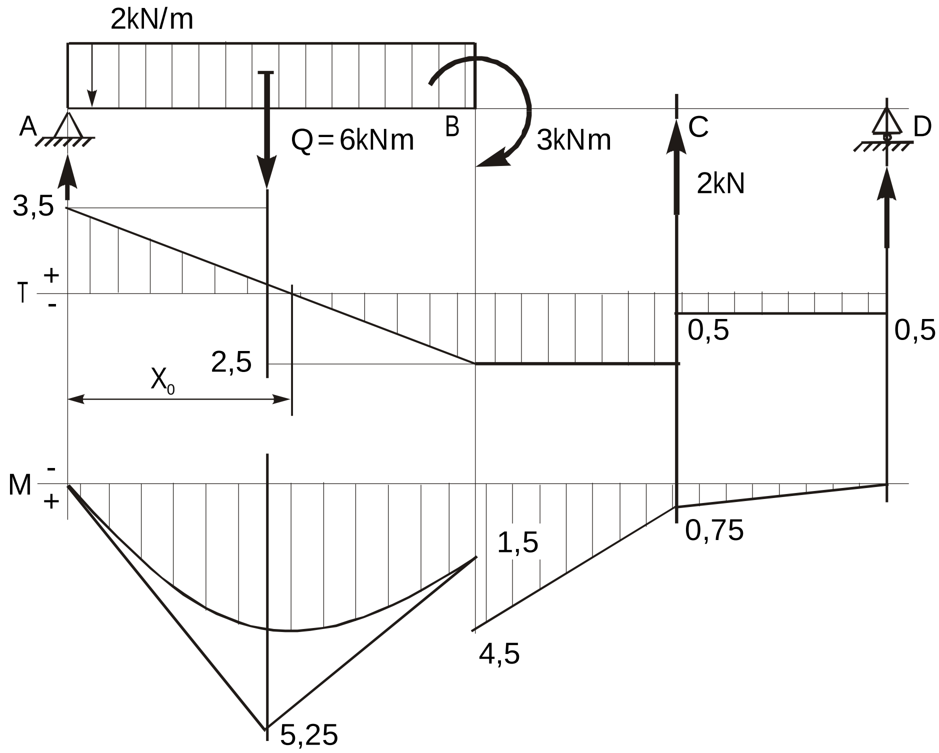
$$X_D = \frac{Y_D}{tg30^0} = 24{,}68\ kN$$

$$\sum X_i = X_A - 1{,}73 - X_D = 0 \quad ; \quad X_A = 26{,}41\ kN$$

$$\sum Y_i = Y_A - 40 - 1 - 2 + Y_D - 2 = 0 \quad ; \quad Y_A = 30{,}75\ kN$$

$$X_0 = \frac{Y_A}{p} = 3{,}075\ m \quad ; \quad M_{MAX} = 47{,}28\ kNm$$

4.10.



4.10.

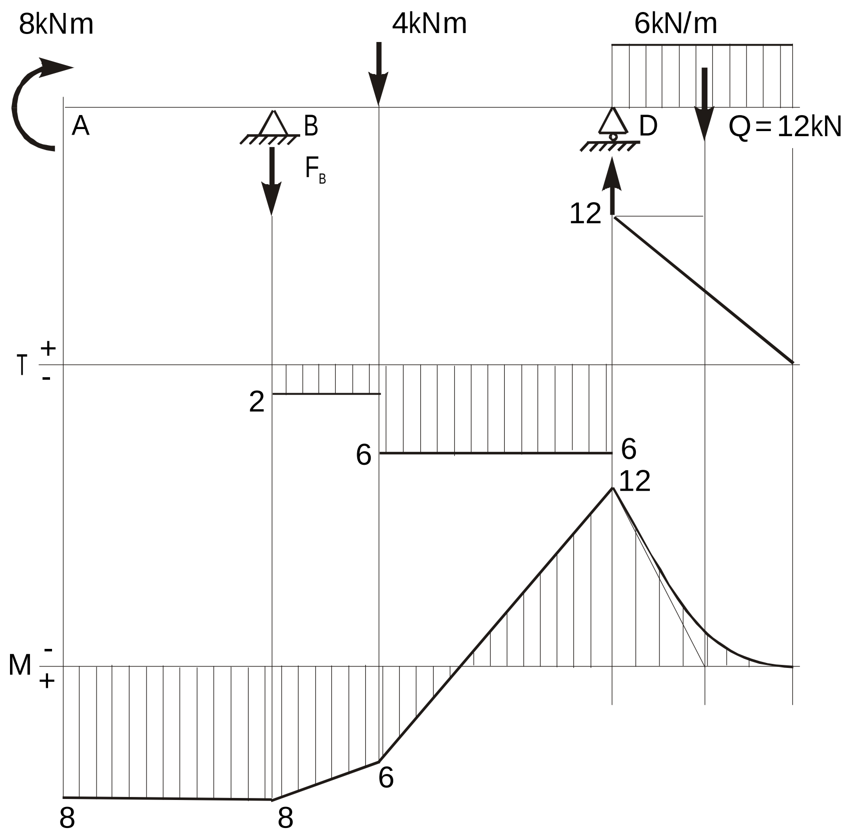
$$\sum_{(A)} M_i = F_D \cdot 6 + 2 \cdot 4{,}5 - 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$F_D = 0{,}5\ kN$$

$$\sum Y_i = F_A - 6 + 2 + F_D = 0 \quad ; \quad F_A = 3{,}5\ kN$$

$$X_0 = \frac{F_A}{p} = 1{,}75\ m \quad ; \quad M_{MAX} = 3{,}0625\ kNm$$

4.11.



4.11.

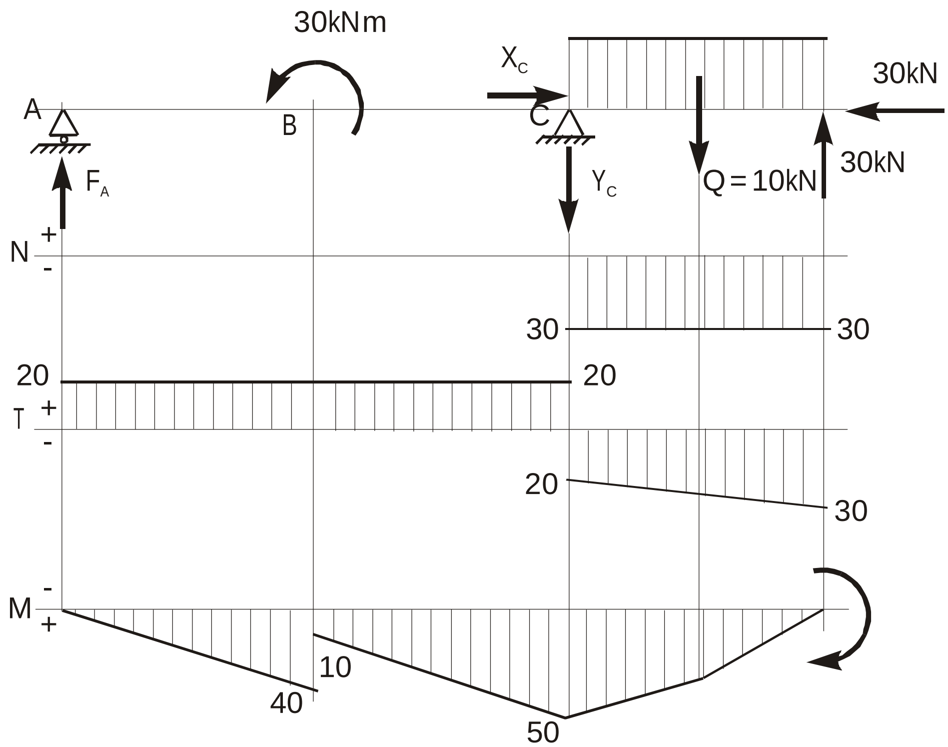
$$\sum_{(B)} M_i = -12 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + F_D \cdot 4 - 8 = 0$$

$$F_D = 18\ kN$$

$$\sum Y_i = F_B - 4 + 18 - 12 = 0$$

$$F_B = -2\ kN$$

4.12.



4.12.

$$\sum_{(C)} M_i = -F_A \cdot 4 + 30 - 10 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 0$$

$$F_A = 20\ kN$$

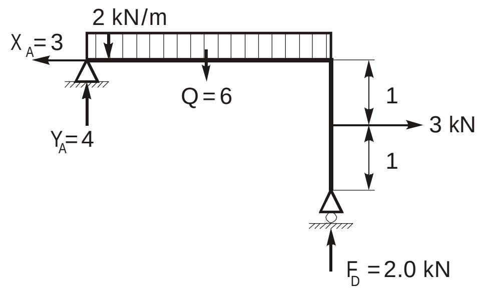
$$\sum Y_i = 20 + Y_C - 10 + 30 = 0$$

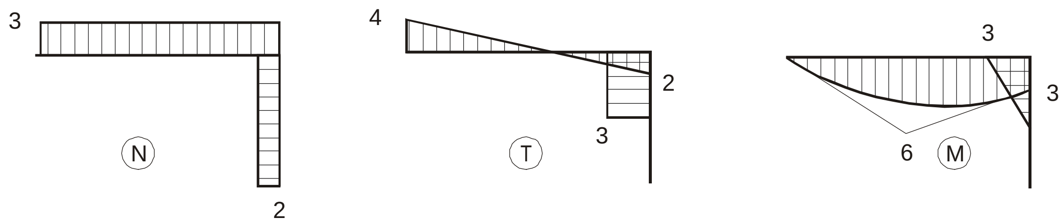
$$Y_C = -40\ kN$$

$$X_C = 30\ kN$$

5.0 TÖRTVONALÚ TARTÓK

5.1.





5.1

$$X_A = F = -3 \quad kN \leftarrow$$

$$F_D = \frac{p \cdot 3 \cdot 1{,}5 - F \cdot 1}{3} = 2 \quad kN \uparrow$$

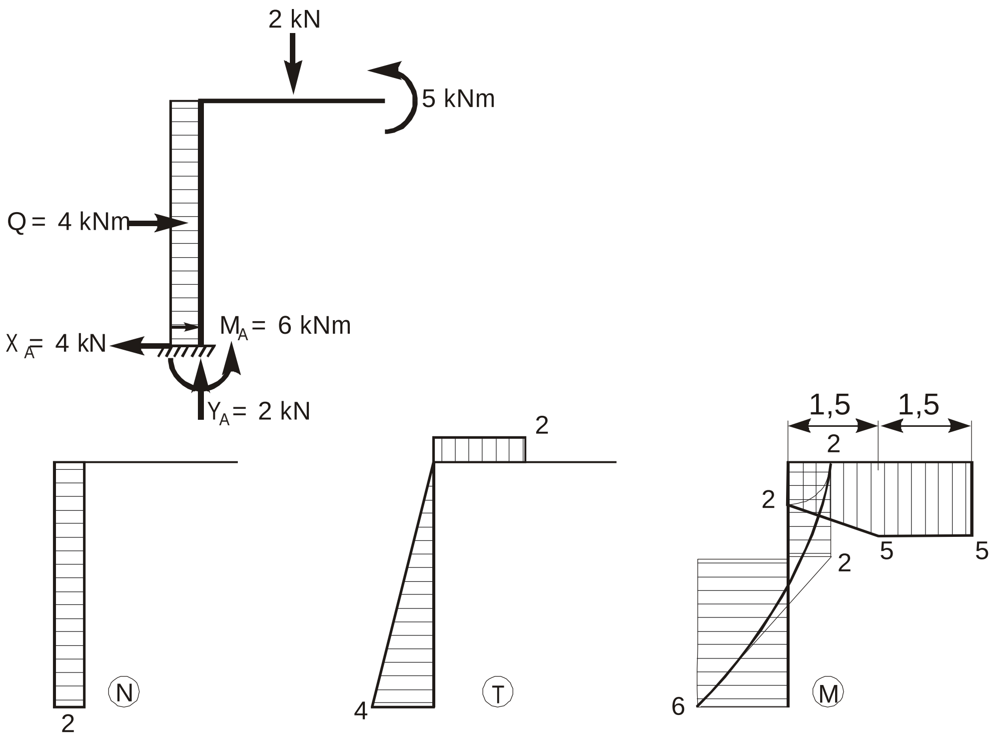
$$Y_A = 4 \quad kN \uparrow$$

$$M_{\max} = 4 \quad kNm \quad (x_0 = 2m - nél)$$

$$M_B = 3 \quad kNm, \qquad M_C = 0, \qquad M_D = 0$$

5.2.

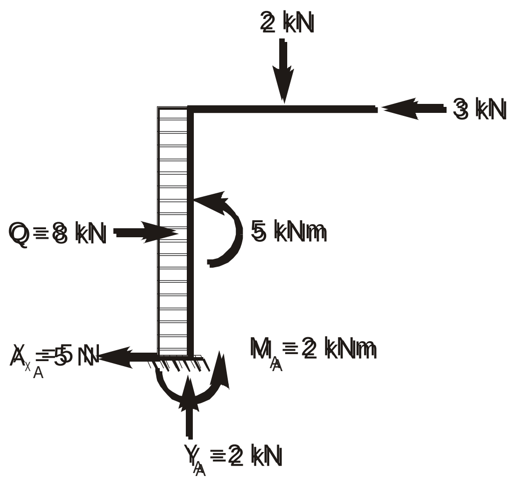
$$X_A = -4 \quad kN \leftarrow, \qquad Y_A = 2 \quad kN \uparrow,$$
$$M_A = 6 \quad kNm, \qquad M_B = 2 \quad kNm, \qquad M_C = M_D = 5 \quad kNm$$

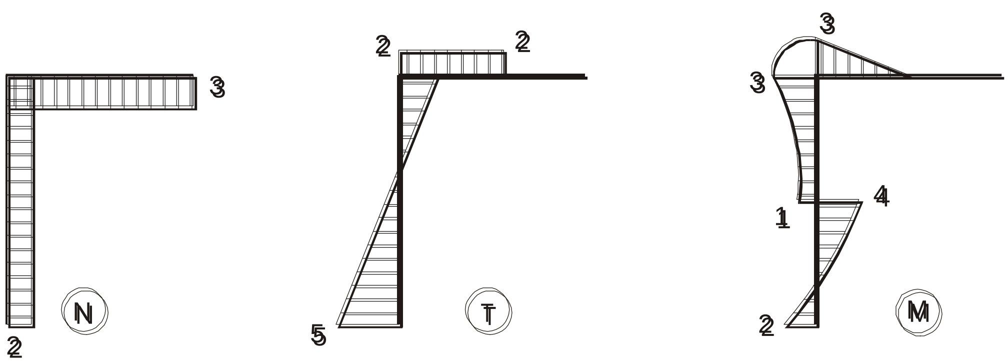


5.2

5.3.

$$X_A = p \cdot 4 - F_2 = 5 \quad kN \leftarrow$$
$$Y_A = F_1 = 2 \quad kN \uparrow$$
$$M_A = p \cdot 4 \cdot 2 - M + F_1 \cdot 1{,}5 - F_2 \cdot 4 = -2 \; kNm$$
$$M_C = -3 \quad kNm, \qquad M_{B1} = 4 \quad kNm$$
$$M_{B2} = -1 \quad kNm, \qquad M_D = 0 \quad kNm$$
$$M_{\max} = -0{,}75 \quad kNm \quad \left(y_0 = 2{,}5 \; m - nél \right)$$

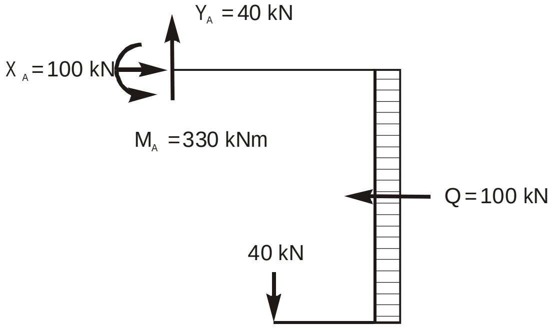


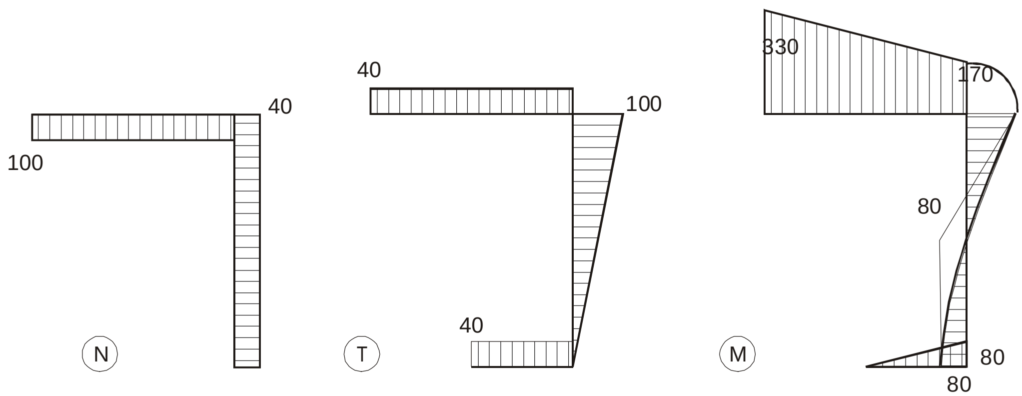


5.3

5.4.

$$X_A = 100 \quad kN, \qquad Y_A = 40 \quad kN, \qquad M_A = -330 \quad kNm$$
$$M_B = -170 \quad kNm, \qquad M_C = 80 \quad kNm, \qquad M_D = 0 \quad kNm$$



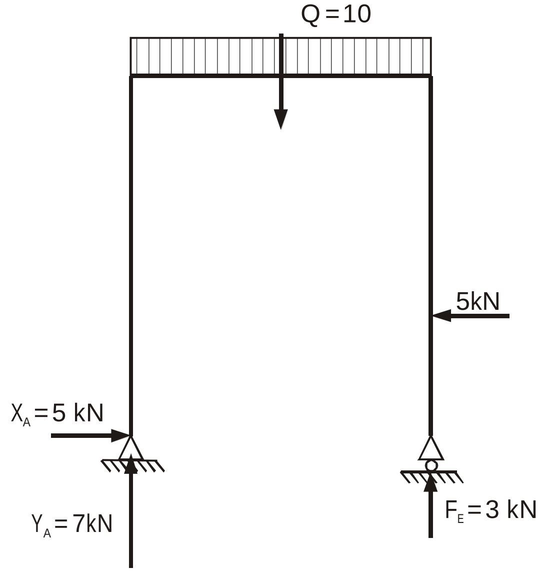


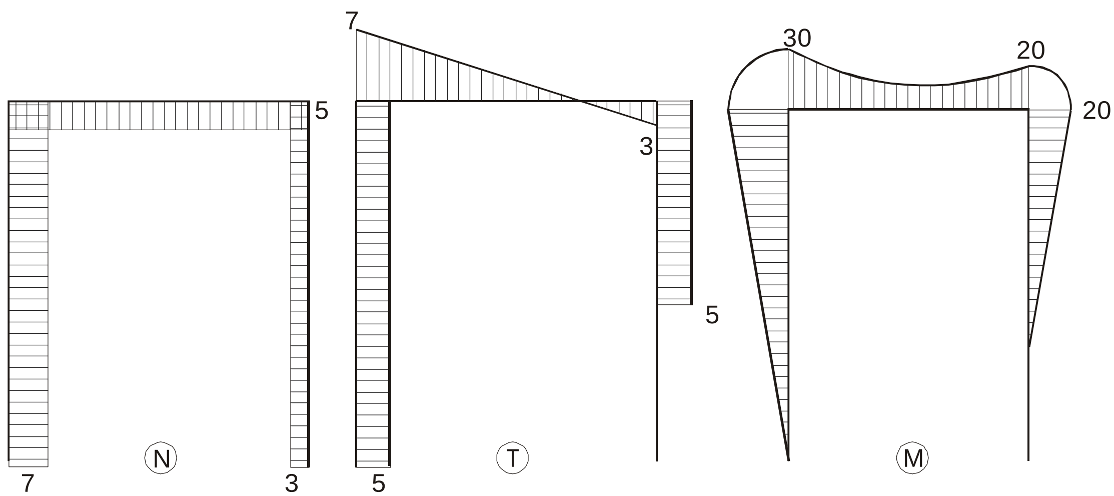
5.4

5.5.

$X_A = 5 \quad kN,$ $\qquad Y_A = 7 \quad kN,$ $\qquad F_E = 3 \quad kN$

$M_B = -30 \quad kNm,$ $\qquad M_C = -20 \quad kNm,$ $\qquad M_D = 0$

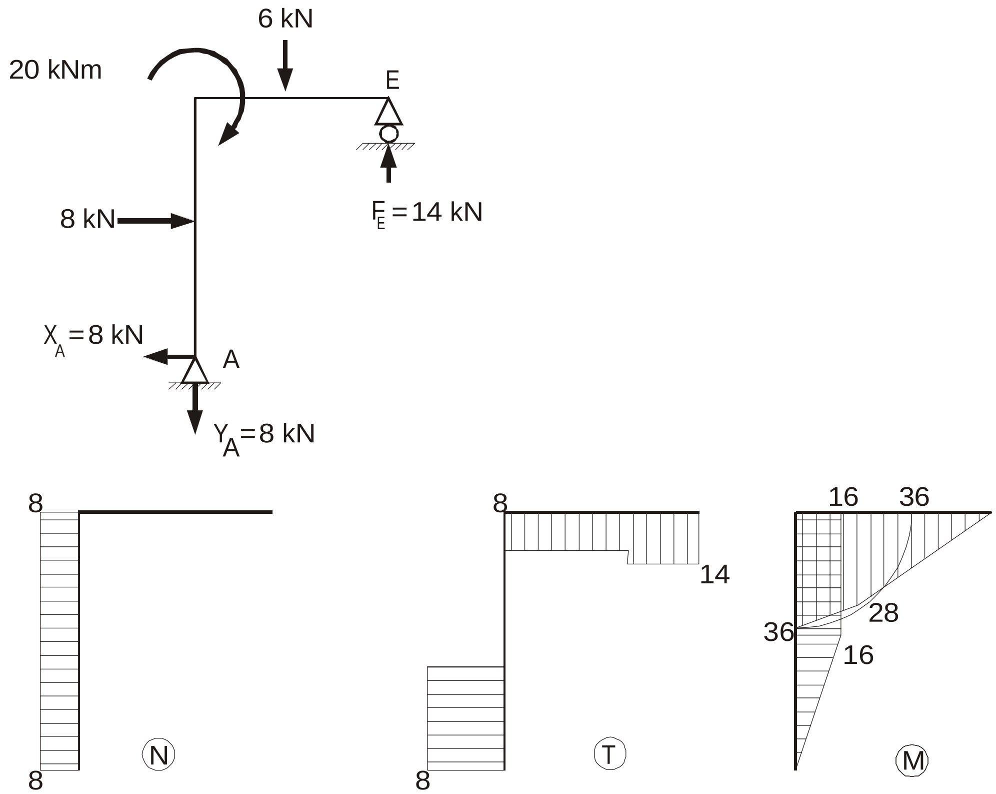




5.5

5.6.

$$X_A = -8 \quad kN, \qquad Y_A = -8 \quad kN, \qquad F_E = 14 \quad kN$$
$$M_B = M_{C1} = 16 \quad kNm, \qquad M_{C2} = 36 \quad kNm, \qquad M_D = 28 \quad kNm$$



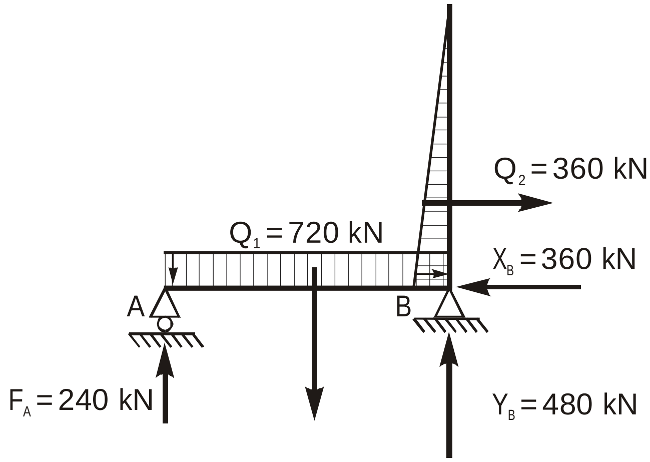
5.6

5.7.

A víz nyomása a fenéken: $h \cdot g = 6m \cdot 10^4 \, N/m^3 = 60 \dfrac{kN}{m^2}$

Ez a 2 m széles AB szakaszon 120 kN/m (x-mentén) megoszló terhelést jelent.
A függőleges oldalfalon (y-mentén) lineárisan változó megoszló terhelés jelentkezik:

$$Q_1 = 120 \cdot 6 = 720 \quad kN$$
$$Q_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 = 360 \quad kN$$
$$M_A = 0 - b\acute{o}l$$
$$Y_B = 480 \quad kN \uparrow, \quad majd \quad F_A = 240 \quad kN \uparrow$$
$$X_B = Q_2 = 360 \quad kN \leftarrow$$

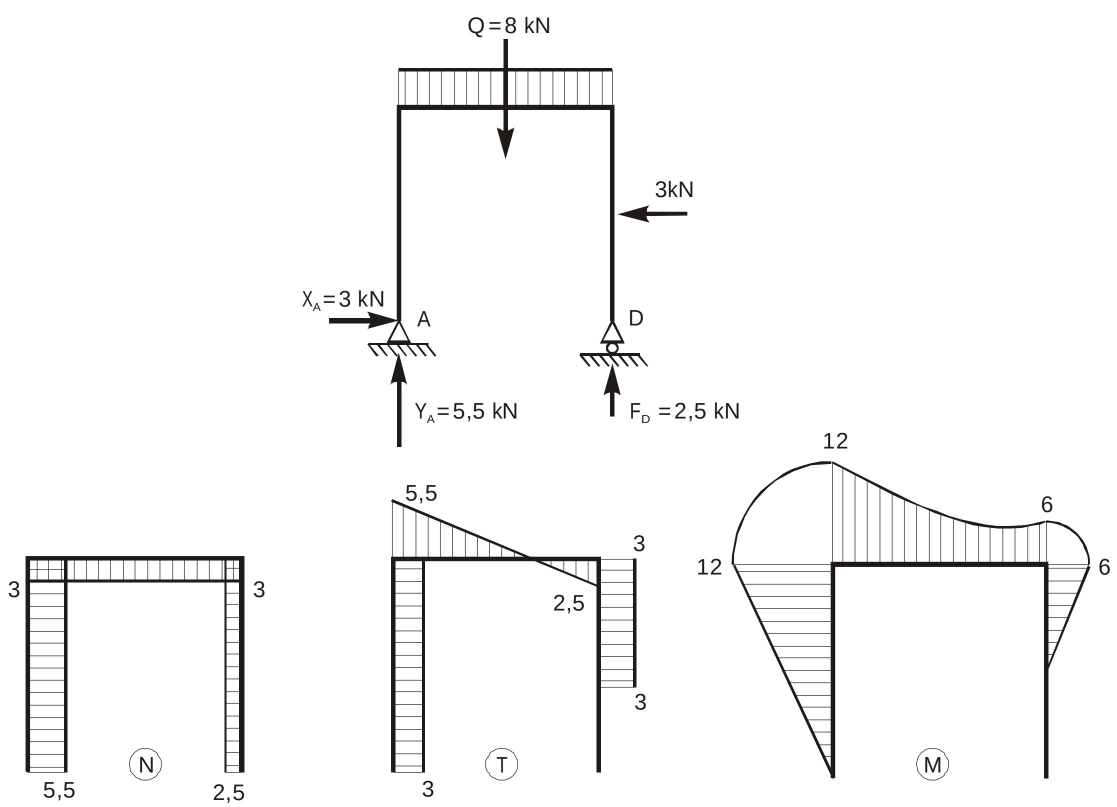


5.7

5.8.

$X_A = 3 \quad kN, \qquad Y_A = 5{,}5 \quad kN, \qquad F_D = 2{,}5 \quad kN$

$M_B = -12 \quad kNm, \qquad M_C = 6 \quad kNm, \qquad M_E = 0 \quad kNm$



5.8

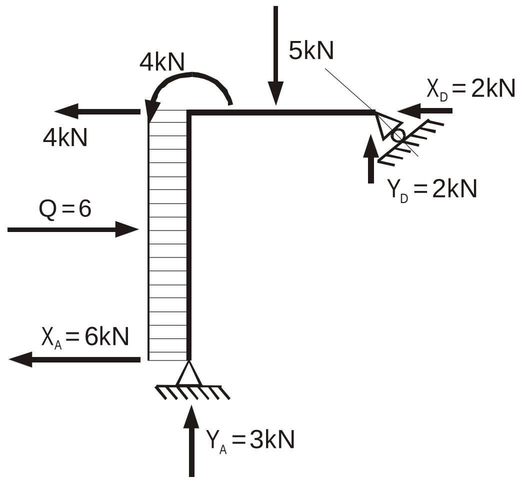
5.9.

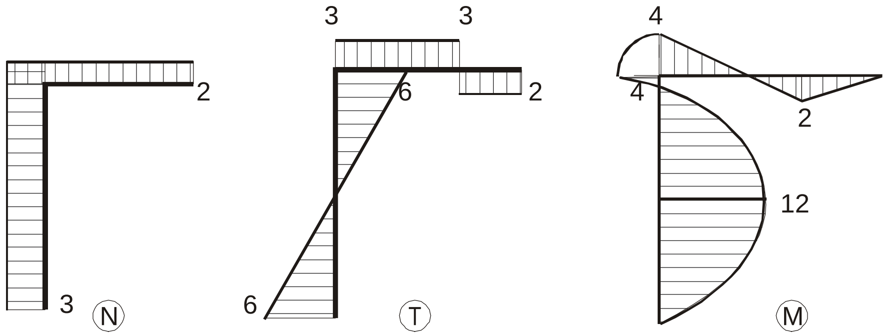
$$\sum M_A = p\cdot 4\cdot 2-4\cdot 4-4+5\cdot 2-Y_D\cdot 3-X_D\cdot 4=0$$

$$X_D=Y_D=2 \quad kN \leftarrow\uparrow$$

$$Y_A=F_1-F_{Dy}=3 \quad kN\uparrow$$

$$X_A=p\cdot 4-F_2-F_{Dx}=6 \quad kN\leftarrow$$





5.9

5.10.

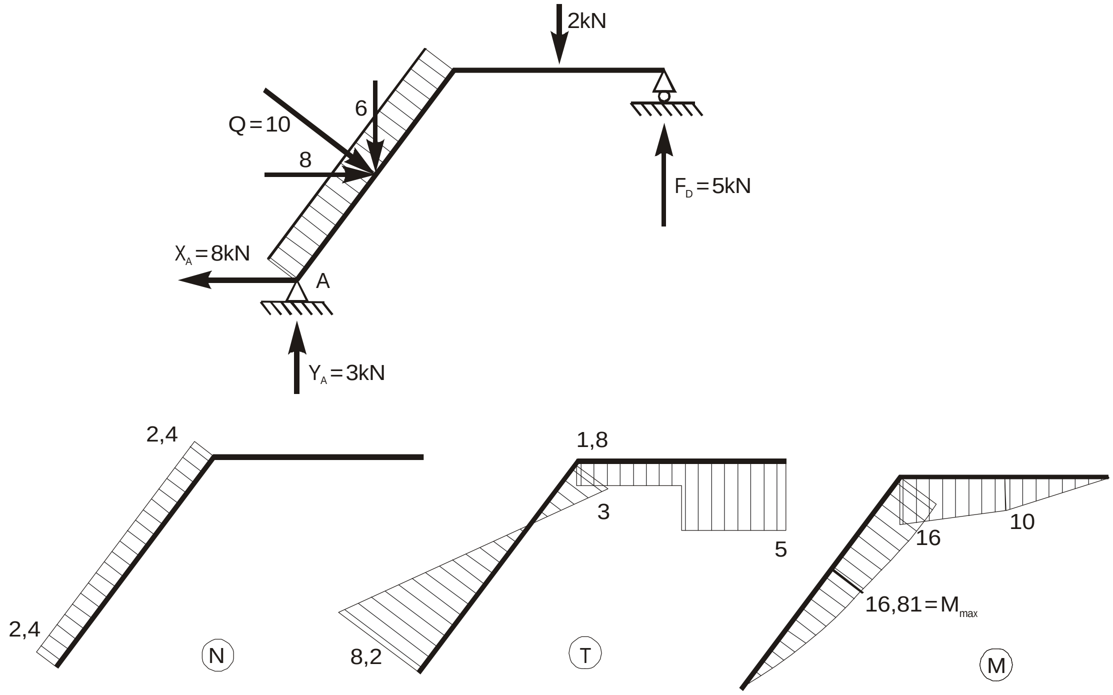
$$Q=10 \quad kN$$

$$Q_x=Q\frac{4}{5}=8 \quad kN$$

$$Q_y=Q\frac{3}{5}=6 \quad kN$$

$$Y_A=3 \quad kN\uparrow, \qquad X_A=8 \quad kN\leftarrow$$

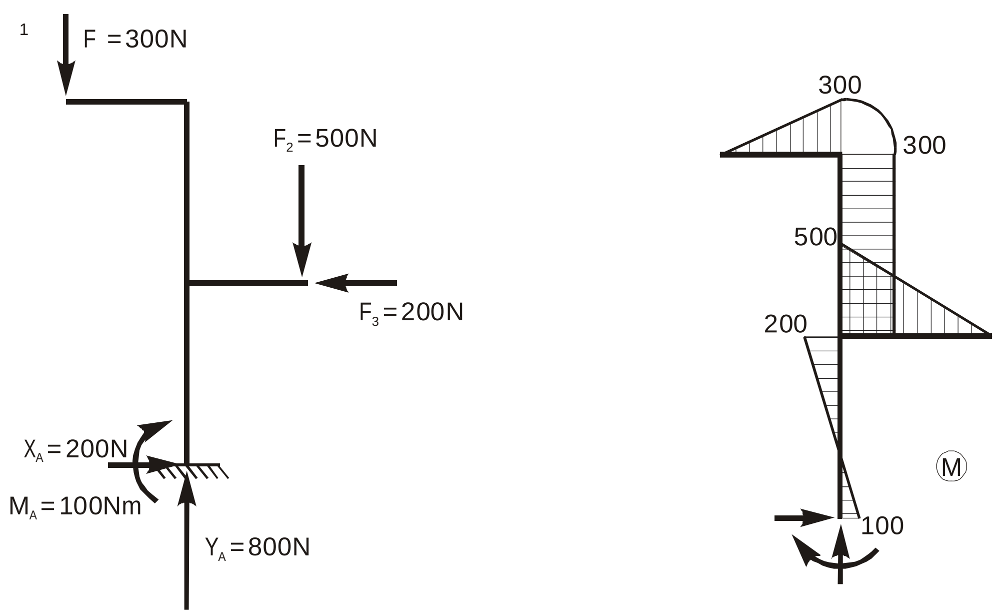
$$F_D=5 \quad kN\uparrow$$



5.10

5.11.

$$X_A = 200 \quad N; \qquad Y_A = 800 \quad N; \qquad M_A = 100 \quad Nm$$
$$M_1 = 300 \quad Nm; \qquad M_2 = 300 \quad Nm; \quad M_3 = 500 \; Nm$$
$$M_4 = 200 \quad Nm, \qquad M_5 = 100 \quad Nm$$



5.11

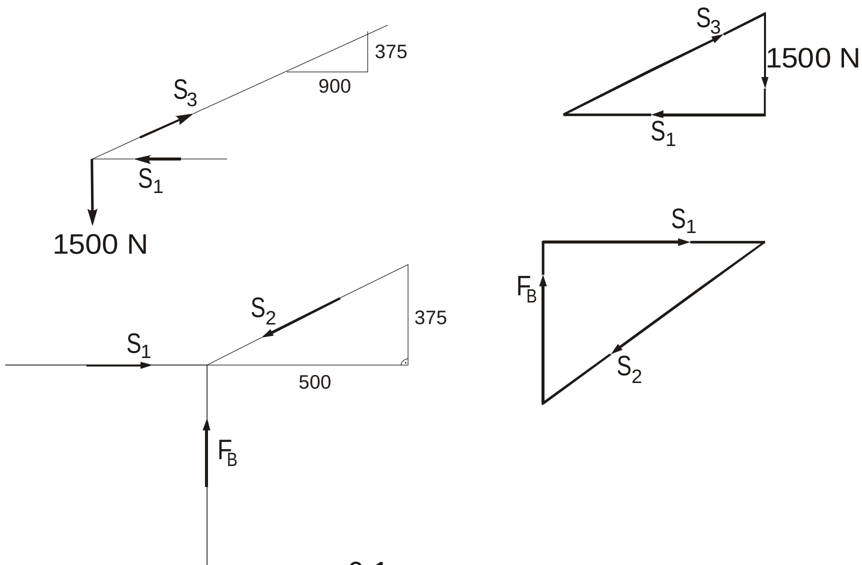
6.0 SIKBELI RÁCSOS TARTÓK

6.1.

Határozzuk meg először a támaszerőket!

$$\sum M_A = F_B \cdot 400 - 1200 \cdot 900 = 0$$
$$F_B = 2700\ N$$
$$\sum Y_i = F_A + F_B - 1200 = 0$$
$$F_A = 1500\ N \downarrow$$

A rúderők a csomópontok egyensúlyából határozhatók meg.



6.1

$$S_1 = -3600; \quad S_2 = -4500\ N; \quad S_3 = 3900\ N$$

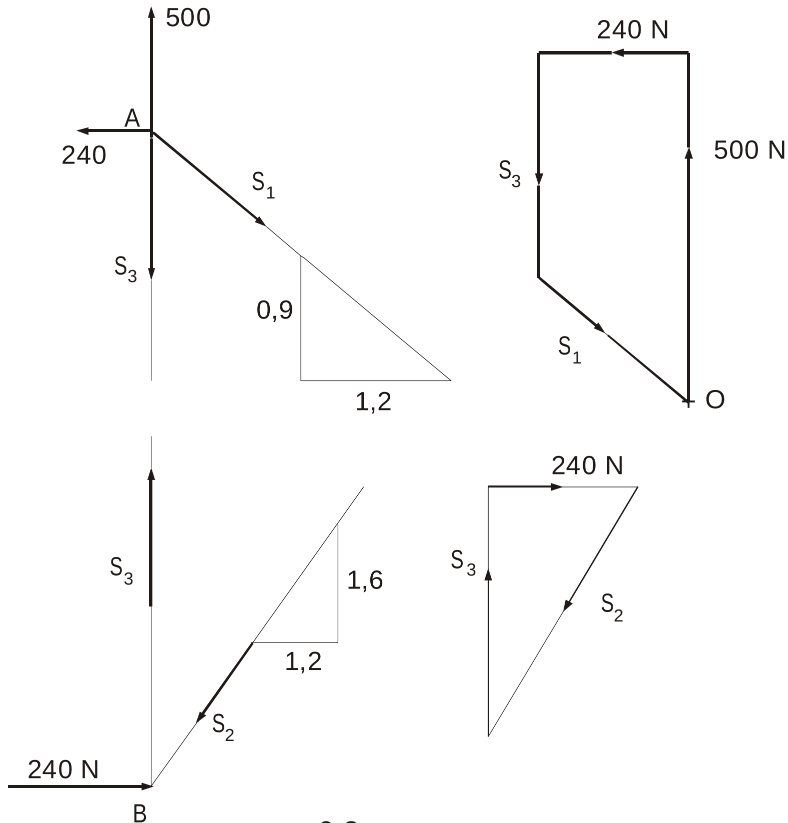
6.2.

Határozzuk meg először a támaszerőket!

$$\sum M_A = -500 \cdot 1{,}2 + F_B \cdot 2{,}5 = 0$$
$$F_B = 240\ N$$

Vetületi egyenletekből:

$X_A = 240\ N \leftarrow \quad ; \quad Y_A = 500\ N \uparrow$



6.2

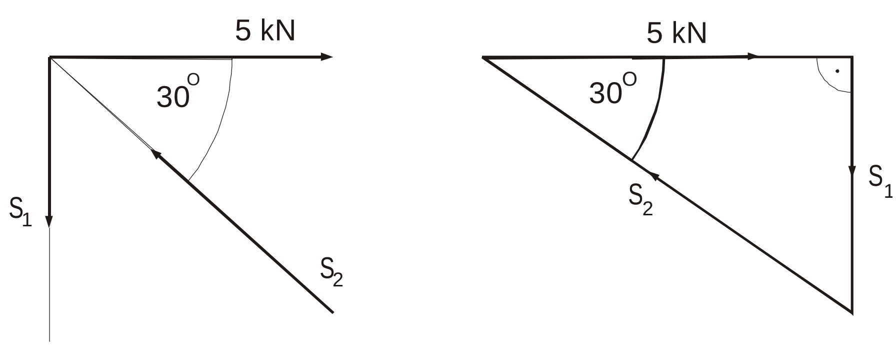
$S_1 = 300\ N \quad ; \quad S_2 = -400\ N \quad ; \quad S_3 = 320\ N$

6.3.

A szimmetrikus terhelés valamint a terhelés szimmetriája miatt

$S_1 = S_7 \quad ; \quad S_2 = S_6 \quad ; \quad S_3 = S_5$

A 2-es, 3-as és 4-es rudak átmetszéséből $S_4 = 5\ kN$. (a támaszerők zérusok).



6.3

$$\sum X_i = -S_{2x} + 5 = 0$$
$$\sum Y_i = -S_1 + S_{2y} = 0$$
$$tg30^0 = \frac{S_{2y}}{S_{2x}}$$

$$S_1 = S_{2y} = 2{,}87\ kN \quad ; \quad S_2 = S_6 = 5{,}77\ kN$$

Az **A** csomópont egyensúlyából következik $S_3 = S_2 = 5{,}77\ kN$.

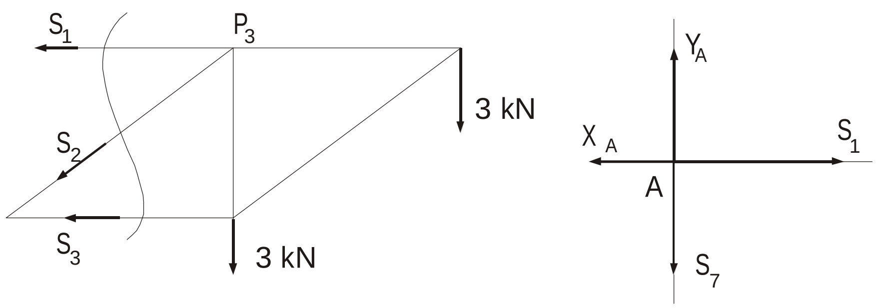
6.4.

Határozzuk meg először a támaszerőket**.**

$$\sum M_A = F_B \cdot 1{,}5 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 0$$
$$F_B = 12\ kN$$

Az **A** csomópont egyensúlyából következik:

$$S_1 = 12\ kN$$
$$S_7 = \ 6\ kN$$



6.4

A hármas átmetszésből meghatározható az S_2 *és* S_3.

Nyomatéki egyenlet a P_3 pontra.

$$-3 \cdot 2 - S_3 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$S_3 = -4\ kN$$

Vetületi egyenletből:

$$S_{2Y} = 6\ kN \quad \text{így} \quad S_2 = -10\ kN$$

A további rúderők: $S_4 = 6\ kN$

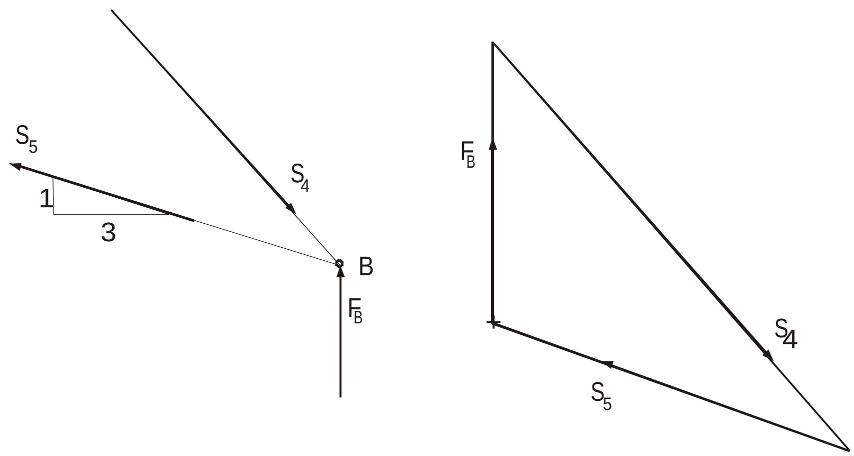
6.5.

A szerkezet és a terhelés szimmetriája miatt**:** $F_A = F_B = 325\ N$.

A 3-as rúdban ébredő erőt a 2-es 3-as és 4-es rudak átmetszéséből kapjuk.

$$F_B \cdot 1{,}5 - S_3 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$S_3 = 325\ N$$

A **B** csomópont egyensúlyából.



6.5

1 cm = 100 N

$$S_1 = S_4 = -689{,}4\ N$$
$$S_2 = S_5 = 513{,}9\ N$$

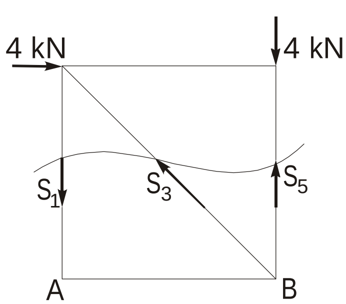
6.6.

Határozzuk meg a támaszerőket!

$$\sum M_A = -4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + F_B \cdot 3 = 0$$
$$F_B = 8\ kN$$

A vetületi egyenletekből következik:

$X_A = 4\ kN \leftarrow$; $Y_A = 4\ kN \downarrow$



6.6

A **B** pontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$S_1 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 0$$
$$S_1 = 4\ kN$$

A 3-as és 1-es rudak metszéspontjára írt nyomatéki egyenletből:

$$-S_5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 0$$
$$S_5 = 4\ kN$$

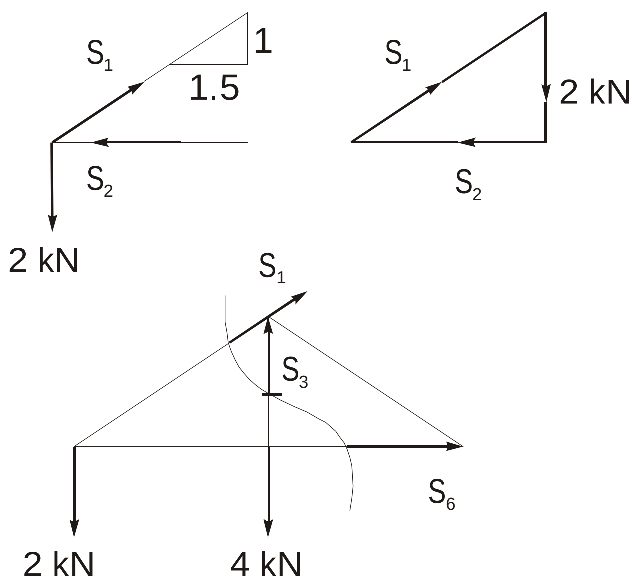
Az S_3-as erő vetületi egyenletből határozható meg: $S_3 = -4\sqrt{2} = -5{,}65\ kN$
A további rúderők: $S_4 = 0$; $S_1 = 4\ kN$

6.7.

Határozzuk meg először a támaszerőket.

$$\sum M_A = F_B \cdot 2 - 4 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 0$$
$$F_B = 7\ kN$$

A vetületi egyenletekből: $X_A = 5\ kN$; $Y_A = 6\ kN$



6.7

$$S_1 = 3{,}6\ kN$$
$$S_2 = -3\ kN$$

Az 1-es és 6-os rudak metszéspontjára írt egyenletből:

$$S_3 = 4\ kN$$

A 3-as és 1-es rudak metszéspontjára írt egyenletből:

$$S_6 \cdot 1 - 2 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$S_6 = -3\ kN$$

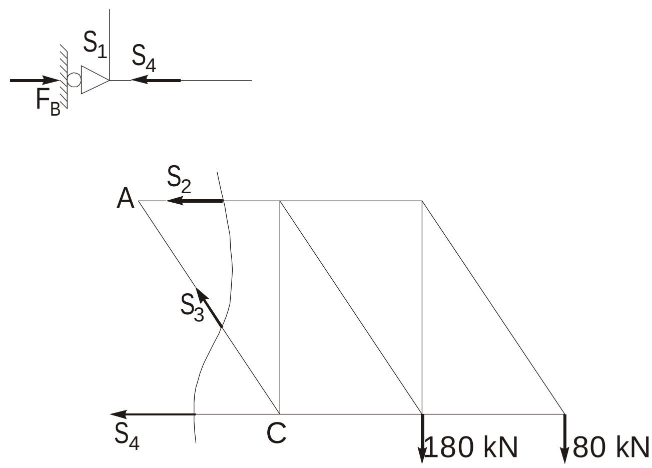
A további rúderők:

$$S_4 = 6\ kN \quad ; \quad S_5 = -4{,}8\ kN \quad ; \quad S_7 = 2{,}66\ kN$$

6.8.

A rúderők a támaszerők meghatározása nélkül is meghatározhatók.

A **B** csomópont egyensúlyából követezik: $S_1 = 0$.



6.8

Az **A** pontra írt nyomatéki egyenletből:

$$-180 \cdot 4 - 80 \cdot 6 - S_4 \cdot 3 = 0$$
$$S_4 = -400\ kN$$

A **C** pontra írt nyomatéki egyenletből:

$$-180 \cdot 2 - 80 \cdot 4 + S_2 \cdot 3 = 0$$
$$S_2 = 226{,}67\ kN$$

Vetületi egyenletből:

$$S_{3Y} = 260\ kN$$
$$S_3 = 312{,}5\ kN$$

A további rúderők:

$$S_5 = 260\ kN \quad ; \quad S_6 = 53{,}33\ kN \quad ; \quad S_7 = 312{,}5\ kN$$

$$S_8 = -226{,}7\ kN\ ; \quad S_9 = -80\ kN \quad ; \quad S_{10} = -53{,}3\ kN$$

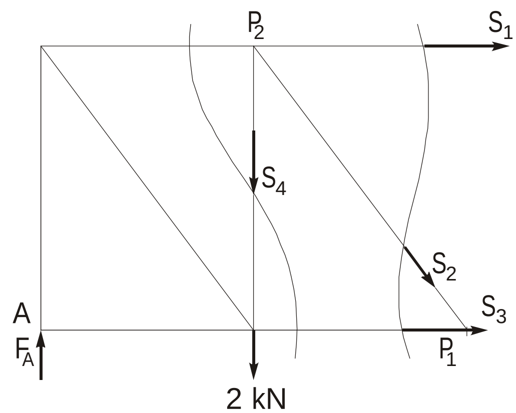
$$S_{11} = 96{,}1\ kN$$

6.9.

Határozzuk meg a támaszerőket!

$$\sum M_B = 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 - F_A \cdot 12 = 0$$

$$F_A = 4{,}5\ kN$$



6.9

Nyomatéki egyenlet a P_1 - pontra.

$$-4{,}5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - S_1 \cdot 4 = 0$$

$$S_1 = -5{,}25\ kN$$

Nyomatéki egyenlet a P_3 - pontra.

$$-4{,}5 \cdot 3 + S_3 \cdot 4 = 0$$

$$S_3 = 3{,}375\ kN$$

$$\sum Y_1 = 0 = -S_{2Y} - 2 + 4{,}5 = 0$$

$$S_2 = 3{,}125\ kN$$

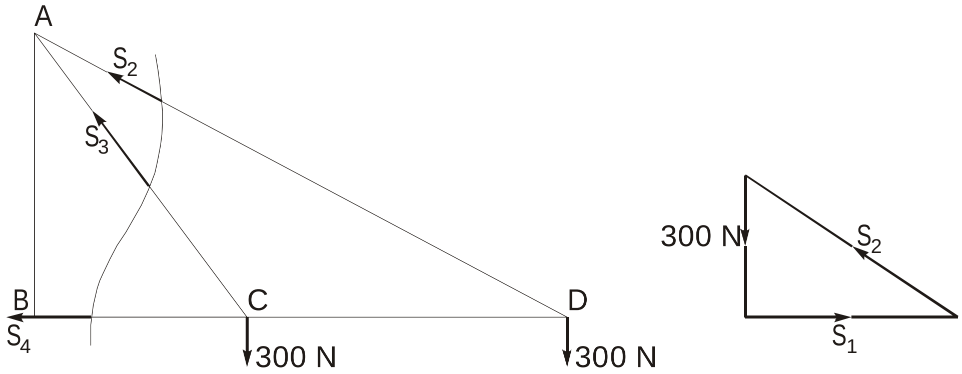
Újabb átmetszésből következik:

$$S_4 = -2{,}5\ kN$$

$$S_5 = 5{,}625\ kN$$

6.10.

A támaszerők meghatározása nélkül



6.10

Az **A** pontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$-300 \cdot 300 - 300 \cdot 750 - S_4 \cdot 400 = 0$$

$$S_4 = -787{,}5\ N$$

A **D** pontra felírt nyomatéki egyenletből:

$$-S_{3Y} \cdot 450 + 300 \cdot 450 = 0$$

$$S_{3Y} = 300\ N$$

$$S_3 = 375\ N$$

A **D** pont egyensúlya miatt szerkeszthető.

$$S_1 = -562{,}5\ kN \quad ; \quad S_2 = 637{,}5\ kN$$

Az 5-ös rúdban nem ébred erő, vakrúd.

7.0 SIKBELI CSUKLÓS SZERKEZETEK

7.1.

Reakcióerők:

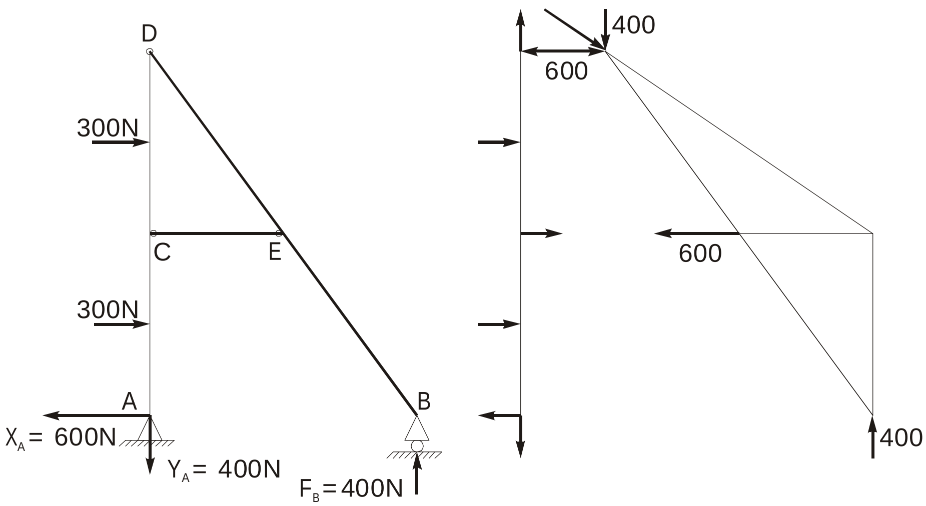
$X_A = 600 \quad N \leftarrow$

$\sum M_A = 300 \cdot 3 + 300 \cdot 9 - F_B \cdot 0$

$F_B = 400\ N \uparrow$

$X_A = 600\ N \leftarrow \quad ; \quad Y_A = 400 \quad N \downarrow$

Rúd és csuklóerőket, a rudak külön-külön való egyensúlya alapján határozhatjuk meg.



7.1

B-D rúd: $M_D = 0 - b\acute{o}l$

$S_{CE} = 600 \quad N$

A-D rúd: $Y_D = Y_A = 400 \quad N$

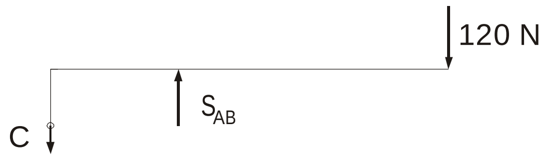
$X_D = 600 \quad N \qquad F_D = 721{,}1 \quad N$

7.2.

$$\sum_{(C)} M_i = S_{AB} \cdot 30 - 120 \cdot 130 = 0$$

$S_{AB} = 520\ N$

$F_C = 400\ N$

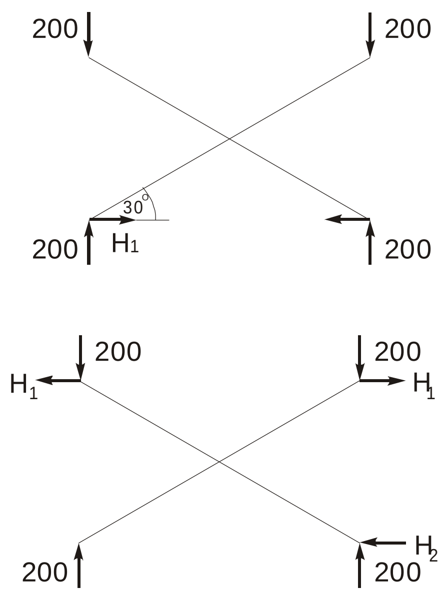


7.2

7.3.

$$200 \cdot l \cdot \cos 30^0 - H_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 30^0 = 0$$

$$H_1 = \frac{2 \cdot 200}{\sin 30^0} - \cos 30^0 = 400 \cdot tg 30^0 = 692{,}8\ N$$

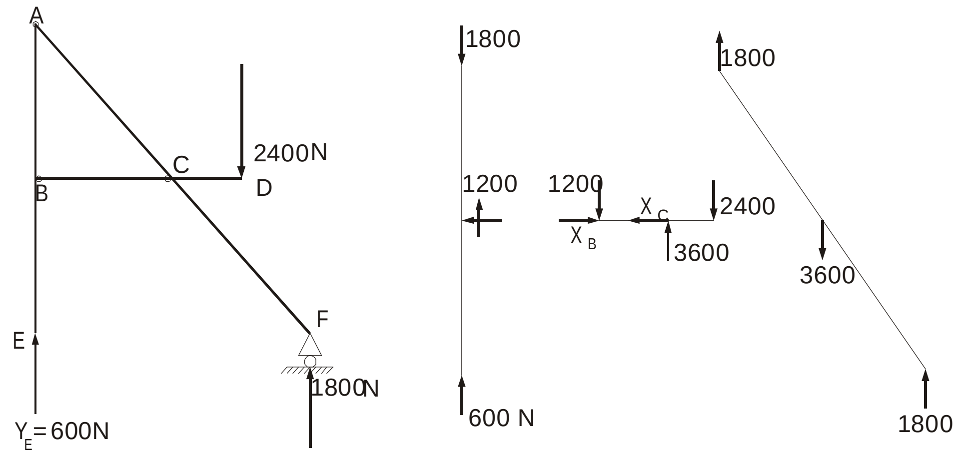


7.3

$$200 \cdot l \cdot \cos 30^0 + H_1 \frac{1}{2} l \cdot \sin 30^0 - H_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 30^0 = 0$$

$$H_2 = 800 \cdot \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = 1385{,}6\ N$$

7.4.

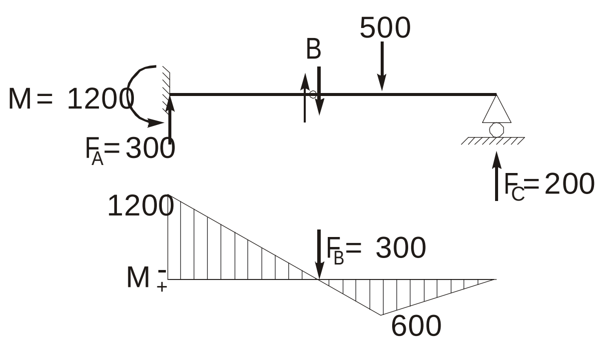


7.4

ACF rúd egyensúlyából:

$$\sum M_A = 1800 \cdot 4{,}8 - 3600 \cdot 2{,}4 + X_C \cdot 2{,}7 = 0$$
$$X_C = 0 \ N$$

7.5.



7.5

B-C egyensúlyából

$\sum M_C = 0$ alapján

$F_B = 300 \quad N \uparrow \quad így \quad F_C = 200 \quad N$

$F_A = 300 \quad N \uparrow$

$M_A = 1200 \quad Nm$

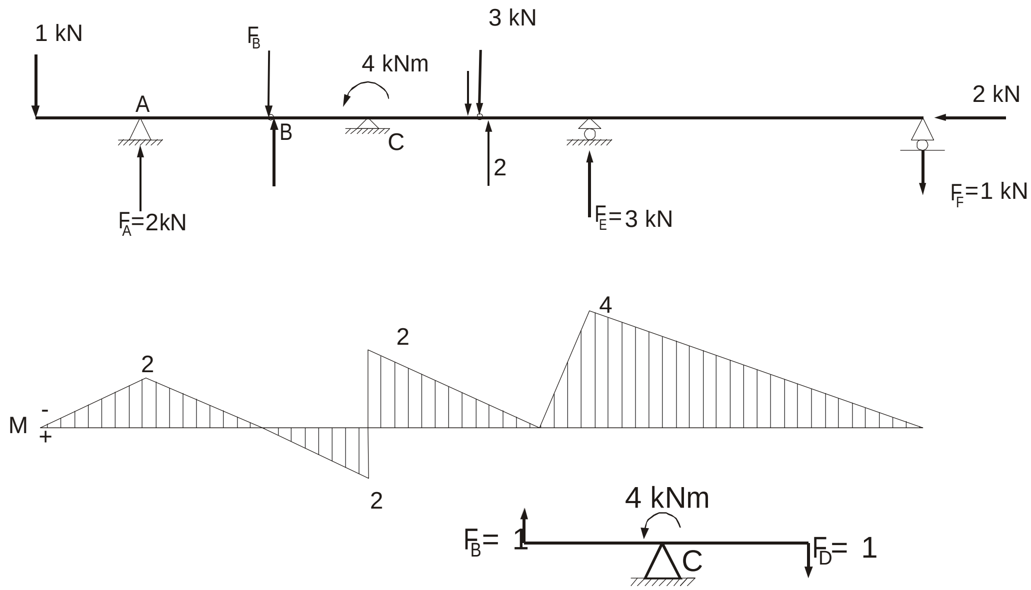
Csuklóban a nyomaték nulla!

7.6.

$$\sum_{(C)} M_i = -(F_B \cdot 2 + F_D \cdot 2) + 4 = 0$$

$$-2 - F_D \cdot 2 + 4 = 0$$

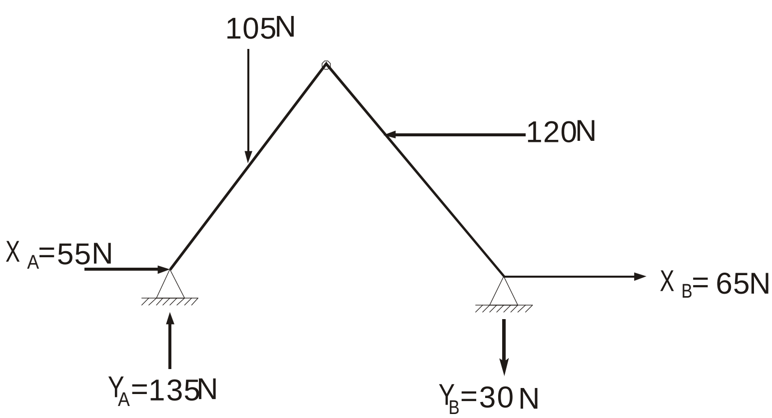
$$F_D = 1\,kN$$



7.6

7.7.

$$Y_A = \frac{120 \cdot 4 + 105 \cdot 7}{9} = 135\ N$$



7.7

Nyomatéki egyenlet a **B** pontra.

$$\sum_{(B)} M_i = -120 \cdot 4 - 105 \cdot 7 + Y_A \cdot 9 = 0$$

$$Y_A = 135\ N \uparrow$$

$$\sum Y_i = 0 = Y_A - 105 + Y_B$$

$$Y_B = 30\ N \downarrow$$

A 2. rész egyensúlyából

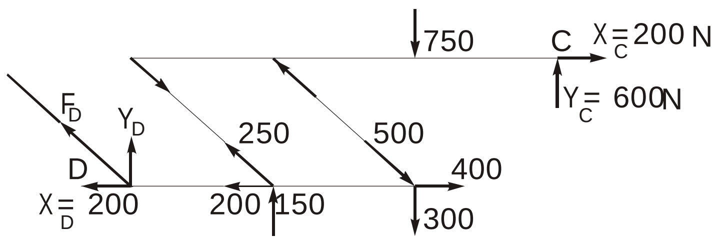
$$\sum_{(C)} M_i = -Y_B \cdot 5 + X_B \cdot 6 - (120 \cdot 2) = 0$$

$$X_B = 65\ N \rightarrow$$

$$\sum X_i = X_C - 120 + 65 = 0$$

$$X_C = X_A = 55\ N \rightarrow$$

7.8.



7.8

$$\sum_{(C)} M_i = 750 \cdot 80 - Y_D \cdot 320 - X_D \cdot 60 = 0$$

$$\frac{Y_D}{X_D} = 0{,}75$$

$$750 \cdot 80 - \frac{3}{4} X_D \cdot 320 - X_D \cdot 60 = 0$$

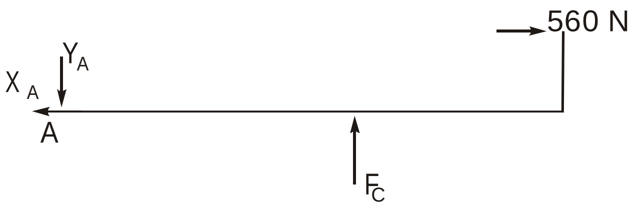
$$X_D = 200\ N$$

$$Y_D = 150\ N$$

7.9.

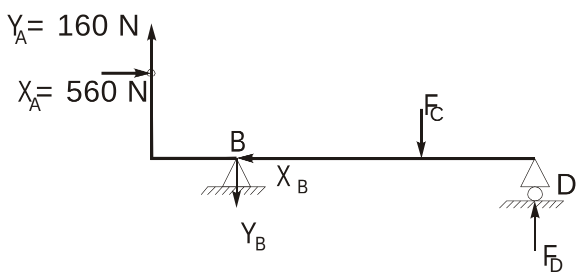
Az egész szerkezet egyensúlyából következik:

$$X_B = 560\ N$$



$$\sum_{(A)} M_i = -560 \cdot 50 + F_C \cdot 175 = 0$$

$$F_C = 160\ N$$

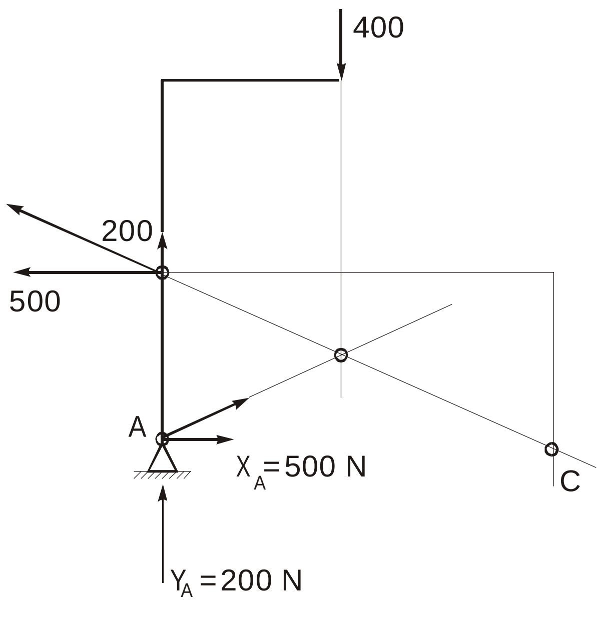


7.9

$$\sum_{(B)} M_i = F_D \cdot 200 - 160 \cdot 125 - 160 \cdot 50 - 560 \cdot 50 = 0$$

$$F_D = 280\ N \quad ; \quad Y_B = 280\ N \quad ; \quad X_B = 560\ N$$

7.10.



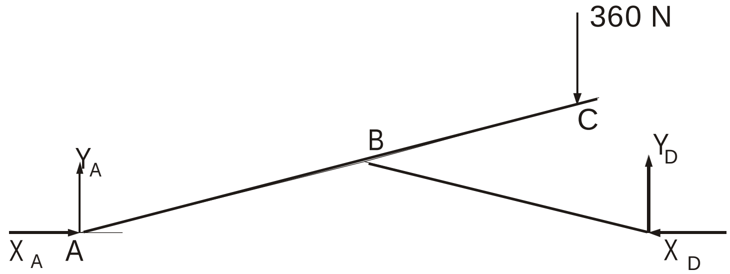
7.10

$X_A = 500 \quad N \quad , \quad Y_A = 200 \quad N$

$X_C = -500 \quad N \quad , \quad Y_C = 200 \quad N$

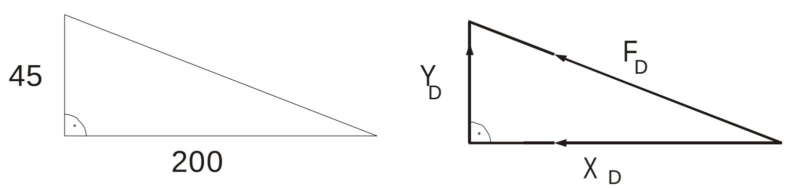
$X_B = 500 \quad N \quad , \quad Y_B = -200 \quad N$

7.11.



$-360 \cdot 300 + Y_D \cdot 400 = 0$

$Y_D = 270$



7.11

$$\frac{Y_D}{45} = \frac{X_D}{200}$$

$X_D = 1200\ N$

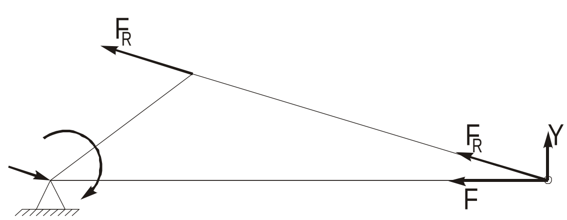
7.12.

A kisebbik karon nyomatékkal nyomaték tart egyensúlyt.

$Y \cdot 0{,}25 - 400 = 0$

$Y = 1600\ N$

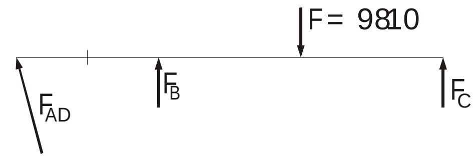
$F = 5600\ N$



7.12

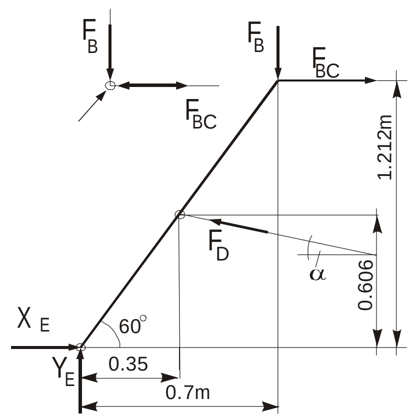
7.13.

Felső lemezre ható erők:



$$\sum X_i = 0 \quad \text{feltételből} \quad F_{AD} = 0$$

$$\sum Y_i = 0 = F_B - F + F_C \quad ; \quad F_B = F_C = 4905\ N$$



7.13

A geometriából:

$$tga = \frac{0,606}{3,2-0,35} = 0,2126 \quad ; \quad a = 12^0$$

A **B** pont egyensúlyából:

$$F_{BC} = F_B \cdot tg30^0 = 2832\ N$$

$$\sum_{(E)} M_i = -F_B \cdot 0,7 - F_{BC} \cdot 1,212 + F_D\left(0,606 \cdot \cos a + 0,35 \cdot \sin a\right) = 0$$

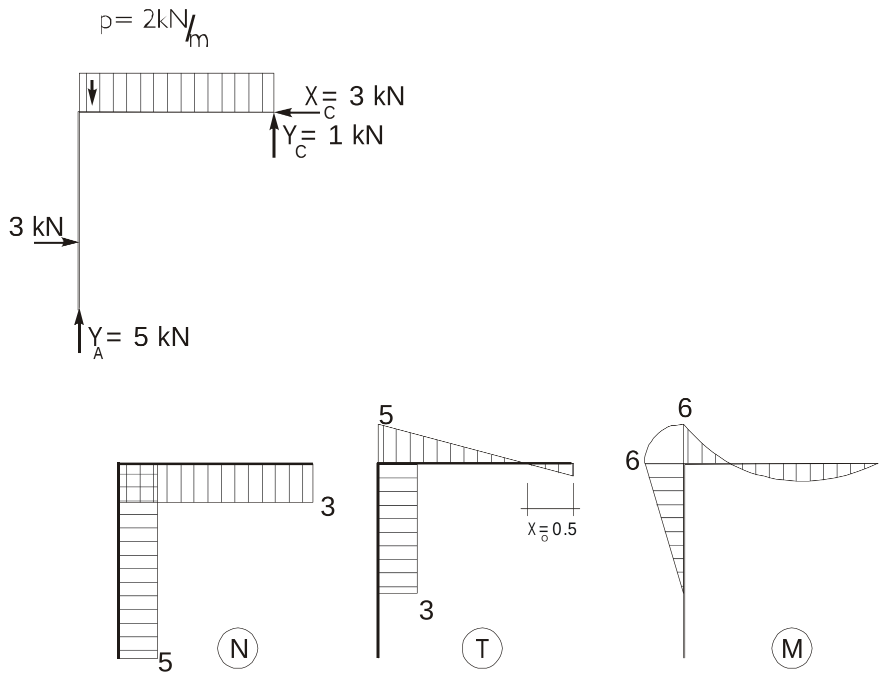
$$F_D = 10316\ N$$

7.14.

$$X_D \cdot 1 + Y_D \cdot 5 - 16 - 9 - 3 = 0$$

$$Y_D \cdot 2 - X_D \cdot 2 - 4 = 0$$

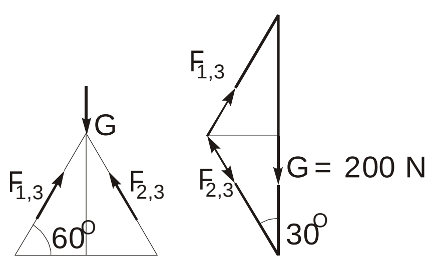
$$X_A = 0 \quad ; \quad Y_A = 5\ kN \uparrow \quad ; \quad Y_D = 5\ kN \uparrow \quad ; \quad X_D = 3\ kN \leftarrow$$



7.14

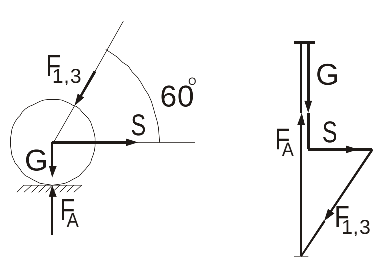
7.15.

A felső henger egyensúlyából:



$$F_{1,3} = F_{2,3} = 115{,}47\ N$$

Az **1** jelű henger egyensúlyából:



7.15

$$F_A = 300\ N \quad ; \quad S = 57{,}7\ N$$

8.0 SÚRLÓDÁS

8.1.

$$Ha \quad F = 0$$
$$G \cdot \sin a \le m_0 \cdot G \cdot \cos a = 29{,}54\ N$$
$$Ha \quad F \ne 0$$
$$\sqrt{F^2 + (G \cdot \sin a)^2} = m_0 \cdot G \cdot \cos a$$
$$F_{MAX} = \sqrt{(m_0 \cdot G \cdot \cos a)^2 - (G \cdot \sin a)^2} = 23{,}9\ N$$
$$F_{MAX} \cong 23{,}9\ N$$

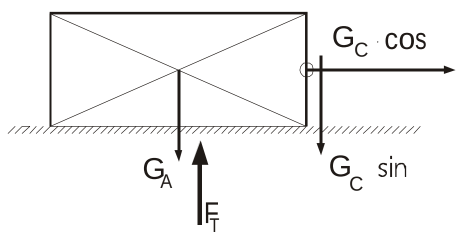
8.2.

A test addig van egyensúlyban míg:

$$G \cdot \sin a - F \le F_S$$
$$50 \quad \angle \quad 104 \quad N$$
$$F_S \le m_0 \cdot F_N \cong 104 \quad N$$
$$F_N = G \cdot \cos a = 260 \quad N$$

Tehát fennáll az egyensúly!

8.3.



8.3

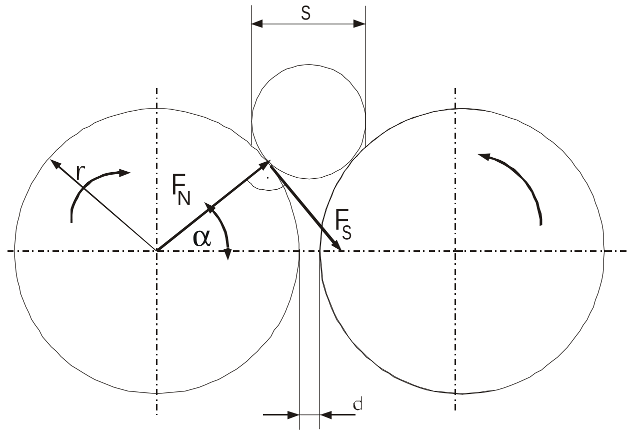
Határesetben:

$$m_0 (G_A + G_C \cdot \sin a) = G_C \cdot \cos a\,,$$
$$m_0 (100 + 80 \cdot \sin a) = 80 \cdot \cos a$$
$$50 + 40 \cdot \sin a = 80 \cdot \cos a$$
$$a = 29{,}4^0$$

8.4.

Az elmozdulás-nyugalom határ-helyzetben:

$$F_N \cdot \sin a = F_S \cdot \cos a$$
$$F_S = m_0 \cdot F_N$$



8.4

Igy:

$$F_N \cdot \sin a = m_0 \cdot F_N \cdot \cos a$$

$$m_0 = tga$$

$$\cos a = \frac{r + \frac{d}{2}}{r + \frac{s}{2}}$$

Ebből: $s = 97{,}9\ mm$

8.5.

Az ék egyensúlyából:

$$\sum Y_i = 0 = -F + 2N \cdot \sin 15^0 + 2m_0 \cdot N \cdot \cos 15^0$$

$$N = \frac{F}{2\left(\sin 15^0 + m_0 \cdot \cos 15^0\right)}$$

A lemez súlyából:

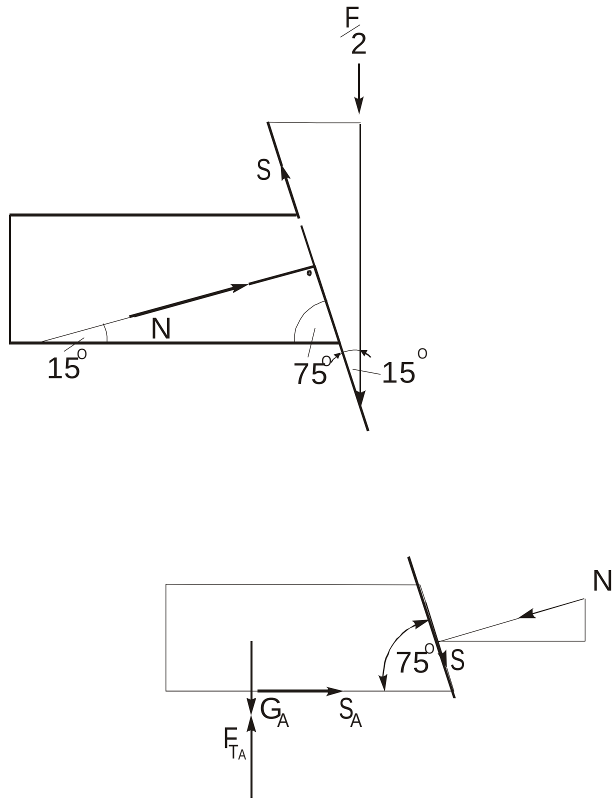
$$\sum X_i = S_A - N \cdot \cos 15^0 + S \cdot \sin 15^0 = 0$$

$$\sum Y_i = -G_A + F_{TA} - S \cdot \cos 15^0 - N \cdot \sin 15^0 = 0$$

A fenti egyenletekből:

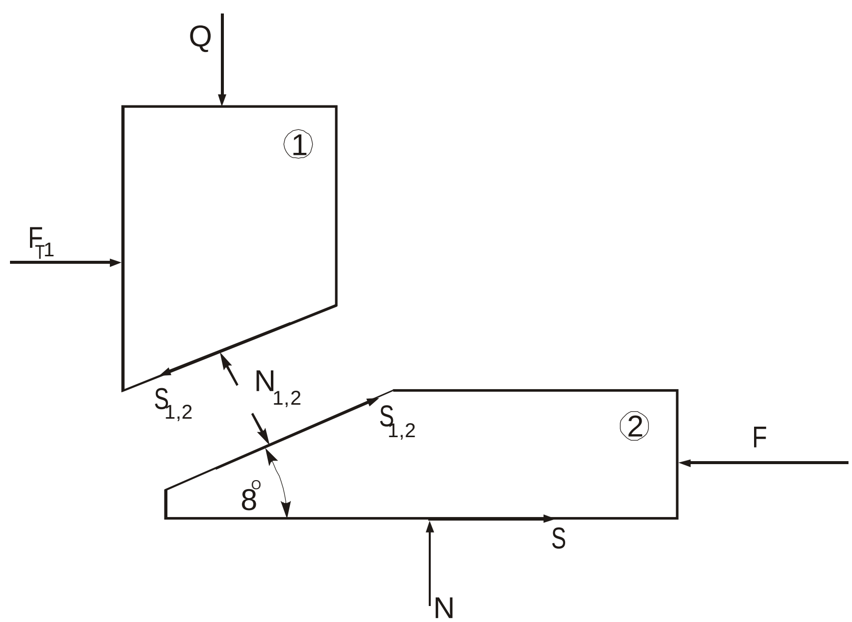
$$N = 52{,}47\ N$$

$$F = 62{,}64\ N$$



8.5

8.6



8.6

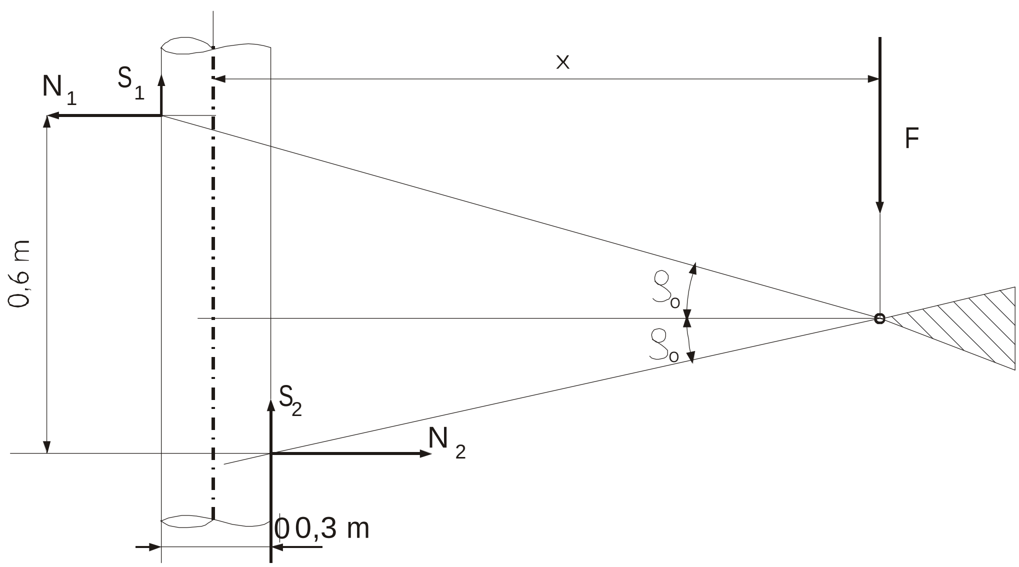
Az **1** jelű test egyensúlyából:

$$\sum X_i = F_{T1} - S_{1,2} \cdot \cos 8^0 - N_{1,2} \sin 8^0 = 0$$
$$\sum Y_i = -Q + N_{1,2} \cdot \cos 8^0 - S_{1,2} \cdot \sin 8^0 = 0$$
$$S_{1,2} = m_{02} \cdot N_{1,2} = 523{,}3\ N$$
$$N_{1,2} = \frac{Q}{\cos 8^0 - m_{02} \cdot \sin 8^0} = 2093{,}2\ N$$

A **2** jelű test egyensúlyából:

$$\sum X_i = N_{1,2} \cdot \sin 8^0 + S_{1,2} \cdot \cos 8^0 + S - F = 0$$
$$\sum Y_i = -N_{1,2} \cos 8^0 + S_{1,2} \cdot \sin 8^0 + N = 0$$
$$N = 1932{,}2 - 67{,}9 = 2000\ N$$
$$S = 500\ N$$
$$F = 1273{,}5\ N$$

8.7.

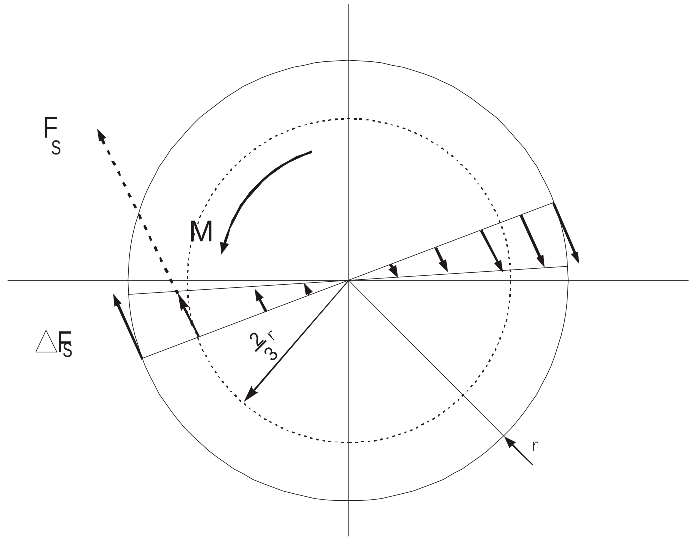


8.7

$$arctg r_0 = 0{,}25$$
$$r_0 = 14{,}04^0$$
$$tg r_0 = \frac{0{,}3}{x}$$
$$x = 1{,}2\ m$$

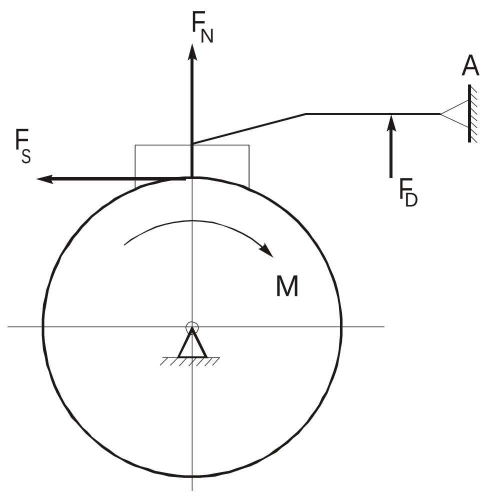
8.8.

$$F_s = G m_0 = 10\ N$$
$$M \geq F_S \cdot \frac{2}{3} r = 200\ Nmm$$



8.8

8.9.



8.9

a) Óramutató irányában forog.

$$F_S = \frac{90}{0,25} = 360\ N$$

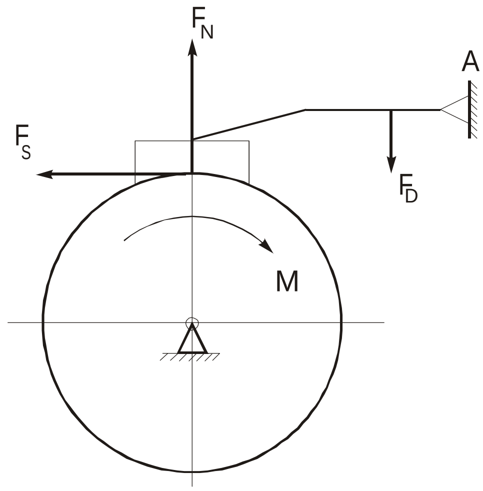
$$F_N = \frac{F_S}{m_0} = 900$$

$$F_D = \frac{900 \cdot 450 + 360 \cdot 150}{150} = 3060\ N$$

b) Órával ellentétesen forog.

$$F_D = 2340\ N$$

8.10.



8.10

a) Irjunk fel nyomatéki egyenletet az **A** pontra.

$$F_D \cdot 150 - F_N \cdot 450 - m_0 \cdot F_N \cdot 150 = 0$$

$$F_N = \frac{2400 \cdot 150}{450 + 60} = 705{,}88\ N$$

$$F_S = m_0 \cdot F_N = 282{,}35\ N$$

$$M = 70{,}58\ Nm$$

b)

$$F_D \cdot 150 - F_N \cdot 450 + m_0 \cdot F_N \cdot 150 = 0$$

$$F_N = \frac{2400 \cdot 150}{450 - 60} = 923\ N$$

$$M = 92{,}3\ Nm$$

8.11

$$\frac{T_1}{T_0} = e^{m_0 \cdot a}$$

$$\ln \frac{T_1}{T_0} = m_0 \cdot 4p$$

$$m_0 = \frac{\ln \frac{7500}{150}}{4p} = 0{,}3114$$

9.0 SIKIDOMOK SÚLYPONTJA ÉS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKA (INERCIÁK)

„Összetett keresztmetszetek másodrendű nyomatékait a részterületek inerciájának összegezésével számítjuk, figyelembe véve az un. „Steiner”-tagokat.

9.1.

$$x_S = \frac{30 \cdot 60 \cdot 15 + 110 \cdot 30 \cdot 85}{30 \cdot 60 + 110 \cdot 30} = 60 \quad mm$$

$$y_S = 0$$

$$I_u = \frac{30 \cdot 60^3}{12} + \frac{110 \cdot 30^3}{12} = 78{,}8 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_v = \left[\frac{30^3 \cdot 60}{12} + 45^2 \cdot 30 \cdot 60\right] + \left[\frac{110^3 \cdot 30}{12} + 25^2 \cdot 110 \cdot 30\right] = 917 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

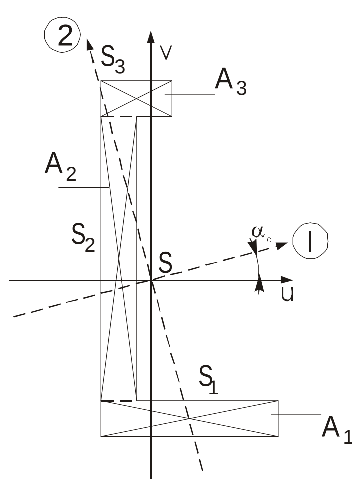
$I_v = I_1$ *és* $I_u = I_2$ főmásodrendű nyomatékok, mivel $I_{uv} = 0$

9.2.

$x_S = 12{,}3 \quad mm \quad ; \quad y_S = 41 \quad mm$

$I_u = 173 \cdot 10^4 \quad ; \quad I_v = 24{,}2 \cdot 10^4 \quad mm^4$

A vegyes másodrendű nyomaték:



9.2

$$I_{uv} = x_1(-y_1)A_1 + (-x_2)y_2 \cdot A_2 + (-x_3) \cdot y_3 \cdot A_3$$

$$I_{uv} = 12{,}7 \cdot (-36) \cdot 500 + (-7{,}3) \cdot 9 \cdot 800 +$$
$$+ (-2{,}3) \cdot (54) \cdot 200 = -30{,}6 \cdot 10^4 \quad mm$$

$$I_{1,2} = \frac{I_u + I_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_u + I_v}{2}\right)^2 + I_{uv}^2}$$

$$I_1 = 179{,}1 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_2 = 18{,}2 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

Főtengelyek helyzete:

$$tg 2a_0 = \frac{I_{uv}}{\frac{I_u - I_v}{2}}; \quad a_0 = 11{,}2^0$$

9.3.

$$x_S = 10 \quad \text{mm}, \qquad y_S = 20 \quad \text{mm}$$

$$I_u = \frac{30 \cdot 60^3}{36} = 18 \cdot 10^4 \quad \text{mm}^4 \quad ; \quad I_v = \frac{30^3 \cdot 60}{36} = 4{,}5 \cdot 10^4 \quad \text{mm}^4$$

$$I_{uv} = -\frac{30^2 \cdot 60^2}{72} = -4{,}5 \cdot 10^4 \quad \text{mm}^4 \quad \alpha_0 = 16{,}8^0$$

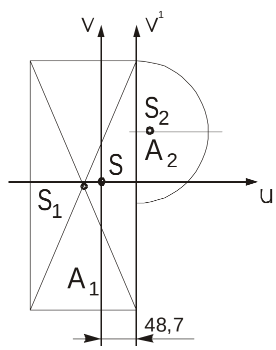
9.4.

$$x_S = 101{,}4 \quad mm \quad ; \quad y_S = 198 \quad mm$$

$$I_u = \left[\frac{150 \cdot 360^3}{12} + 18^2 \cdot 150 \cdot 360\right] + \left[\frac{200^4 p}{128} + 62^2 \cdot \frac{200^2 p}{8}\right]$$

$$I_v = \left[\frac{150^3 \cdot 360}{12} + 26{,}3^2 \cdot 150 \cdot 360\right] +$$

$$+ \left[\frac{200^4 p}{128} - \left(\frac{4 \cdot 100}{3p}\right)^2 \cdot \frac{200^2 p}{8} + \left(\frac{4 \cdot 100}{3p} + 48{,}7\right)^2 \cdot \frac{200^2 p}{8}\right]$$



9.4

vagy:

$$I_v = I_{v'} - (48{,}7)^2 \cdot (A_1 + A_2)$$

$$I_{v'} = \frac{150^3 \cdot 360}{3} + \frac{200^4 p}{128} - 48{,}7^2 \cdot 69700$$

$$I_u = 7 \cdot 10^8 \quad mm^4, \quad I_v = 2{,}8 \cdot 10^8 \quad mm^4, \quad I_{uv} = 1{,}15 \cdot 10^8 \quad mm^4,$$

$$I_1 = 8{,}4 \cdot 10^8 \quad mm^4, \quad I_2 = 1{,}4 \cdot 10^8 \quad mm^4, \quad a_0 = -14{,}3^0$$

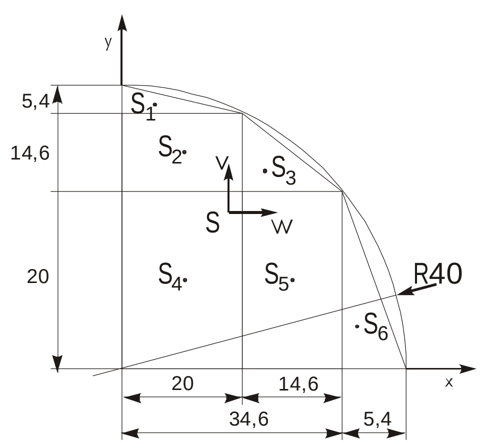
9.5.

$$x_S = y_S = 16{,}5 \quad mm$$
$$I_u = \sum_1^6 \left(I_{u'i} + v_{si}^2 \cdot A_i \right)$$

ahol;
$I_{u'i}$ - az i-edik részterület u-val párhuzamos súlyponti tengelyére számított „saját” inerciája.
v_{si} - a súlypontok v koordinátája,
A_i - a részterület nagysága.
$I_v = I_u$ a szimmetria miatt:

$$I_u = I_v = 12{,}7 \cdot 10^4 \quad mm^4$$
$$I_{uv} = -3{,}87 \cdot 10^4 \quad mm^4$$
$$I_1 = 16{,}5 \cdot 10^4 \quad mm^4$$
$$I_2 = 8{,}8 \cdot 10^4 \quad mm^4$$
$$a_0 = 45^0$$

$$I_{uv} = \sum_1^6 \left(I_{u'v'i} + u_{si} \cdot v_{si \cdot A_i} \right)$$
ahol az $I_{u'v'i}$ a részterület súlyponti tengelyére számított vegyes másodrendű nyomatékok. A négyszögeké és az S_3 súlypontú háromszögé nullával egyenlő, $I_{u'v'1} = I_{u'v'6} = -\frac{5{,}4^2 \cdot 20^2}{72}$



9.5

9.6.

$$x_s = \frac{\sum_1^3 x_i \cdot A_i}{A_{ossz}}$$

$$x_s = \frac{80 \cdot 50 \cdot 40 - \frac{50^2 p}{8} \cdot \frac{4 \cdot 25}{3p} - \frac{20^2 p}{4} \cdot 50}{80 \cdot 50 - \frac{50^2 p}{8} - \frac{20^2 p}{4}}$$

$$x_s = 49{,}5 \quad mm \quad \approx 52 \quad mm$$

$$I_x = \frac{80 \cdot 50^3}{3} - \frac{50^4 p}{128} - \frac{20^4 p}{64}$$

$$I_y = \frac{80^3 \cdot 50}{12} - \frac{50^4 p}{128} - \left(\frac{20^4 p}{64} + 50^2 \cdot \frac{20^2 p}{4} \right)$$

$$I_{ys} = I_y - x_s^2 \cdot A_{össz}$$

$$I_x = 67{,}2\, cm^4 \ ; \quad I_{ys} \ \& \ 95{,}9\, cm^4$$

$$I_x = 68 \quad cm^4; \quad I_{yS} = 95 \quad cm^4$$

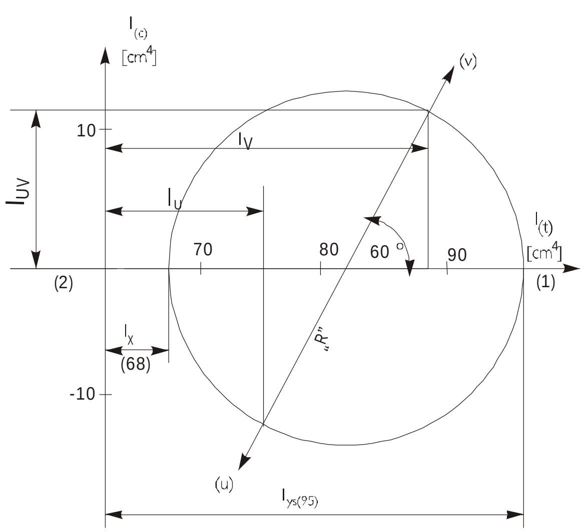
$$Mivel \quad I_{xyS} = 0; I_x = I_2, I_{yS} = I_1$$

$$2a_0 = 60^0$$

$$"R" = \frac{I_{yS} - I_x}{2} = 14{,}35$$

$$\frac{I_v - I_u}{2} = "R" \cdot \cos 60^0 \ = 7{,}18$$

$$I_{uv} = "R" \cdot \cdot \sin 60^0 = 12{,}43 \quad cm^4$$



9.6

$$I_u = \frac{I_{yS} + I_x}{2} - \frac{I_v - I_u}{2} = 74{,}37 \quad cm^4$$

$$I_v = \frac{I_{yS} + I_x}{2} + \frac{I_v - I_u}{2} = 88{,}73 \quad cm^4$$

9.7.

$x_S = 4{,}9 \quad mm; \qquad y_S = 18{,}35 \quad mm$

$$I_u = \left[\frac{20^4 p}{8} + 1{,}65^2 \cdot \frac{20^2 p}{2}\right] + \left[\frac{40^3 \cdot 20}{12} + 1{,}65^2 \cdot 20 \cdot 40\right] + \left[\frac{20^3 \cdot 20}{36} + 11{,}68^2 \cdot \frac{20^2}{2}\right]$$

$$I_v = \left[\frac{20^4 p}{128} - 8{,}5^2 \cdot \frac{20^2 p}{8} + 13{,}4^2 \cdot \frac{20^2 p}{8}\right] + \left[\frac{20^3 \cdot 40}{12} + 5{,}1^2 \cdot 20 \cdot 40\right] +$$

$$+ \left[\frac{20^3 \cdot 20}{36} + 21{,}8^2 \cdot \frac{20^2}{2}\right]$$

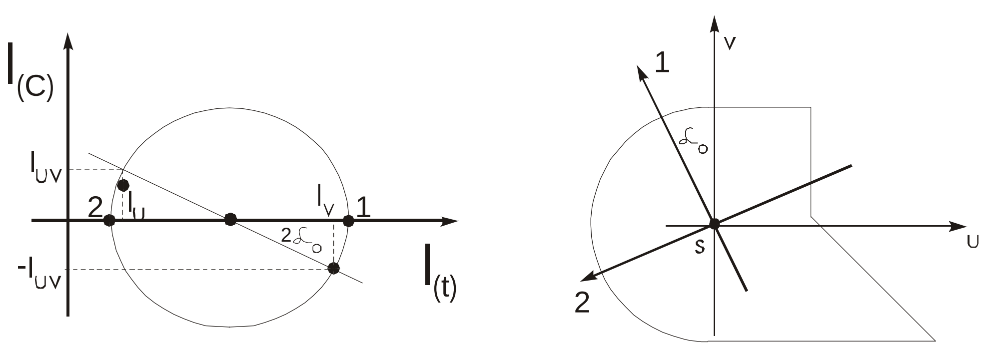
$$I_{uv} = -4{,}9 \cdot 1{,}65 \cdot \frac{20^2 p}{2} + 5{,}1 \cdot 1{,}65 \cdot 20 \cdot 40 - \frac{20^2 \cdot 20^2}{72} - 11{,}7 \cdot 21{,}8 \cdot \frac{20^2}{2}$$

$I_u = 21{,}40 \cdot 10^4 \quad mm^4; \quad I_v = 27{,}71 \cdot 10^4 \quad mm^4; \quad I_{uv} = -6{,}04 \cdot 10^4 \quad mm^4$

Mohr – kör " jellegre" helyesen:

$$I_{1,2} = \frac{I_u + I_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_v - I_u}{2}\right)^2 + I_{uv^2}} \qquad tg 2a_0 = \frac{I_{uv}}{\frac{I_v - I_u}{2}}$$

$I_1 = 31{,}4 \cdot 10^4 \quad mm^4; \quad I_2 = 17{,}7 \cdot 10^4 \quad mm^4 \qquad a_0 = -31{,}2^0$



9.7.

9.8.

$$x_s = \frac{\frac{-60^2}{2}\cdot 20 + 60^2\cdot 30 - \frac{40^2 p}{4}\cdot\left(60 - \frac{4\cdot 40}{3p}\right)}{\frac{60^2}{2} + 60^2 - \frac{40^2 p}{4}}$$

$$y_s = \frac{\frac{60^2}{2}\cdot 20 + 60^2\cdot 30 - \frac{40^2 p}{4}\cdot\frac{4\cdot 40}{3p}}{\frac{60^2}{2} + 60^2 - \frac{40^2 p}{4}}$$

$$x_S = 4{,}34 \quad mm; \qquad y_S = 29{,}6 \quad mm$$

$$I_u = I_x - y_s^2 \cdot A_{össz}$$

$$I_u = \left[\frac{60^3\cdot 60}{12} + \frac{60^4}{3} - \frac{40^4 p}{16}\right] - 29{,}6^2\cdot 4144$$

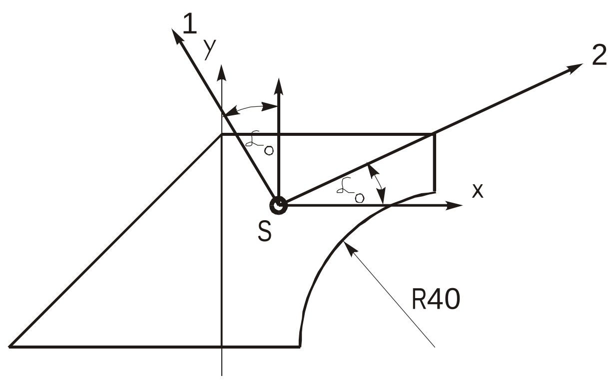
$$I_v = \left[\frac{60^3\cdot 60}{36} + 24.3^2\cdot\frac{60^2}{2}\right] + \left[\frac{60^4}{12} + 25{,}7^2\cdot 60^2\right] -$$

$$-\left[\frac{40^4 p}{16} - 17^2\cdot\frac{40^2 p}{4} + 55{,}7^2\cdot\frac{40^2 p}{4}\right]$$

$$I_{uv} = \left[\frac{60^2\cdot 60^2}{72} + (-24{,}3)\cdot(-9{,}6)\cdot\frac{60^2}{2}\right] + \left[0 + 25{,}7\cdot 0{,}4\cdot 60^2\right] -$$

$$-\left[0{,}0165\cdot 40^4 + 38{,}7\cdot(-12{,}6)\frac{40^2 p}{4}\right]$$

$$I_u = 126{,}68\cdot 10^4; \qquad I_v = 286\cdot 10^4; \qquad I_{uv} = 120{,}7\cdot 10^4 \quad mm^4$$



9.8

$$I_{1,2} = \frac{I_u + I_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_v - I_u}{2}\right)^2 + I_{uv}^2} \qquad tg2\alpha_0 = \frac{I_{uv}}{\frac{I_v - I_u}{2}}$$

9.9

$$y_s = \frac{120\cdot 20 + 50\cdot 38{,}6 + 16\cdot 43}{120+50+16}$$

$$y_s \cong 27 \quad \text{cm}$$

$$I_u = \left[30000 + 7^2\cdot 120\right] + \left[300 + 11{,}6^2\cdot 50\right] + \left[\frac{4^4}{12} + 16^2\cdot 16\right]$$

$$I_y == 1200 + 4800 + \frac{4^4}{12}$$

$$I_u = 47025 \quad \text{cm}^4 \qquad I_y = 6021 \quad \text{cm}^4$$

$$I_u = I_1; \qquad I_y = I_2; \qquad \text{mivel} \quad I_{uv} = 0$$

9.10.

$$I_x = \frac{30^4 p}{8} + \frac{20^3\cdot 30}{3} + \frac{60^3\cdot 30}{12} - \frac{45\cdot 20^3}{12}$$

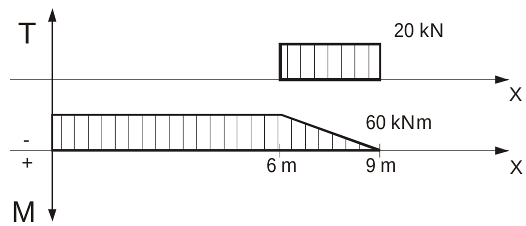
$$I_y = \frac{30^4 p}{8} + \frac{30^3\cdot 20}{3} + \frac{30^3\cdot 60}{12} - 2\cdot\frac{22.5^3\cdot 20}{12}$$

$$I_{xy} = \left[(-15)\cdot(-10)\cdot 20\cdot 30\right] + \left[\frac{30^2\cdot 60^2}{72} + 10\cdot(-20)\cdot\frac{30\cdot 60}{2}\right]$$

$$I_x = 90{,}8\cdot 10^4 \quad mm^4, \quad I_y = 59{,}5\cdot 10^4 \quad mm^4, \quad I_{xy} = -4{,}5\cdot 10^4 \quad mm^4$$

11.0 HAJLITÁS

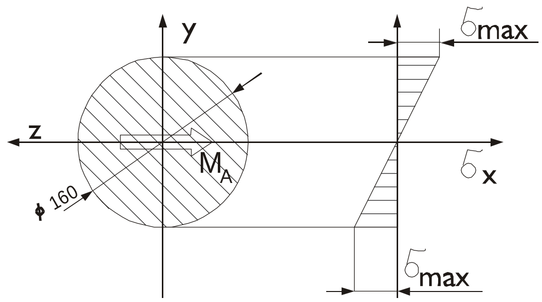
11.1. Az „A” keresztmetszet igénybevétele: hajlítás $M_A = -20 \cdot 9 + 20 \cdot 6 = -60$ kNm$(\cap)$, $T_A = 0$, tehát itt nyírás nincs.



Mivel M_A a z tengellyel párhuzamos, $("M_z")$ x irányú feszültséget ébreszt: a $s_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$

függvény írja le a feszültség változását a keresztmetszetben.
y= ± 80 mm-nél (szélső szálban):

$$\pm \quad s_{\max} = \frac{60 \cdot 10^6 [Nmm]}{\frac{160^4 p}{64} [mm^4]} \cdot 80 \quad [mm] = 149{,}3 \quad MPa$$



11.1

11.2. A reakcióerők: $F_A = F_B = 2$ kN
A tartón x=0,1 m-től 0,3 m-ig állandó, $M_z = 0{,}2$ kNm a legnagyobb hajlítónyomaték.

A keresztmetszet inerciája: $I_z = \frac{20^4}{12}$

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y_{\max} \qquad \left(y_{\max} = \frac{20}{\sqrt{2}} \text{mm} \right)$$

$\pm \quad s_{x\max} = 212{,}1 \quad MPa \quad \langle \quad s_M$, a tartó nem felel meg !

11.3.

$\sum M_A = 0 = -5 \cdot 2 + F_B \cdot 5 - \text{ből} \quad ; \quad F_B = 2 \text{ kN} \uparrow$

$F_A = -F + F_B = 3 \quad \text{kN} \uparrow$

így x=2m-nél $M_{z\max} = 6 \quad \text{kNm}$

$I_z = \frac{100^4}{12} - \frac{90^4}{12} \approx 2{,}87 \cdot 10^6 \quad \text{mm}^4$

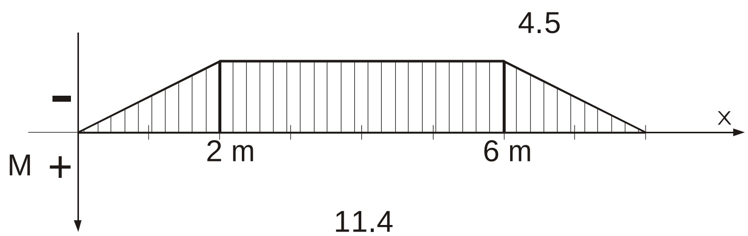
$\pm \quad \sigma_{x\max} = 104{,}5 \quad \text{MPa} \quad \langle \quad \sigma_M$ - megfelel !

11.4.

$\sum M_A = 0 = 2{,}25 \cdot 2 + F_B \cdot 4 - 2{,}25 \cdot 6$

$F_B = 2{,}25 \quad kN \uparrow \qquad F_A = 4{,}5 - 2{,}25 = 2{,}25 \quad kN \uparrow$

így a nyomatéki ábra:



11.4

$x = 0 - 4(\text{m}) - \text{ig}, \quad M_{z\max} = 4{,}5 \quad \text{kNm} \quad I_z = \frac{100 \cdot 86^3}{36}; \quad \left(y_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 86 \right)$

$\sigma_{x\max} = 146 \quad \text{MPa} \quad \rangle \quad \sigma_M,$ nem felel meg !

11.5. Reakció erők egyformák: $F = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5 \quad kN \uparrow$

$x = 1{,}5m - n\acute{e}l \ (k\ddot{o}z\acute{e}pen) \quad M_{z\max} = 4{,}5 \cdot 1{,}5 - \frac{3 \cdot 1{,}5^2}{2} = 3{,}375 \quad kNm$

$I_z = \frac{60^3 20}{3} + \frac{20^3 \cdot 60}{3} - 10^2 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 60 = 1{,}36 \cdot 10^6 \quad mm^4$

y=50 mm-nél felső $s_{nyom\acute{o}\max} = 124{,}1 \quad MPa \quad \langle \quad s_{hM}$

y= -30 mm-nél alsó $s_{h\acute{u}z\acute{o}\max} = 74{,}4 \quad MPa \quad \langle \quad s_{nyM}$

A tartó megfelel!

11.6.

ıÖvlemez nélkül:

$I_z = \frac{500^3 \cdot 12}{12} + 4 \cdot \left(138 \cdot 10^4 + 223{,}8^2 \cdot 1870\right) +$

$+ 2 \cdot \left(\frac{10^3 \cdot 230}{12} + 255^2 \cdot 2300 \right)$

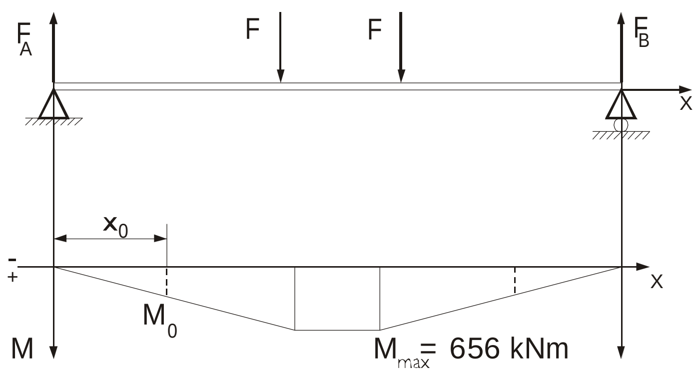
ahol az L szelvény adatai táblázatból! (MSZ 328)

$$I_z = 804{,}7 \cdot 10^6 \quad mm^4$$

$$K_Z = 3{,}095 \cdot 10^6 \quad mm^3$$

így:

$$s_{\max} = 212 \quad MPa \quad \rangle \quad s_{meg}!$$



11.6

Övlemezzel $I_z^{'} = I_z + 2 \cdot \left(\frac{10^3 \cdot 230}{12} + 265^2 \cdot 2300 \right) = 1128 \cdot 10^6 \quad mm^4, \quad K_z^{'} = 4{,}18 \cdot 10^6 \quad mm^3$

Ha $s_{\max} \le s_{meg} = \frac{M_0}{K_z} \rightarrow \quad M_0 = 494{,}4 \quad kNm$

$x_0 = \frac{M_0}{F_A} = 3{,}09$ m-től van szükség erősítésre,

l=4,02 m hosszon, így $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{K_z^!} = 157 \quad MPa$

11.7.

$\sum M_A = 0 = 80 + F_B \cdot 6 - 20$ alapján

$F_B = 10 \quad kN \downarrow$ és $F_A = 10 \quad kN \uparrow$

Nyomatéki ábra:

11.7

$M_{\max}$= 80 kNm x = 0-nál $\sigma_{\max}$= 2,63 MPa < σ_M

11.8.

$F_C = 35 \quad kN \qquad F_D = 175 \quad kN$

$T_{MAX} = \quad 91 \quad kN$

$M_{MAX} = 168 \quad kNm$

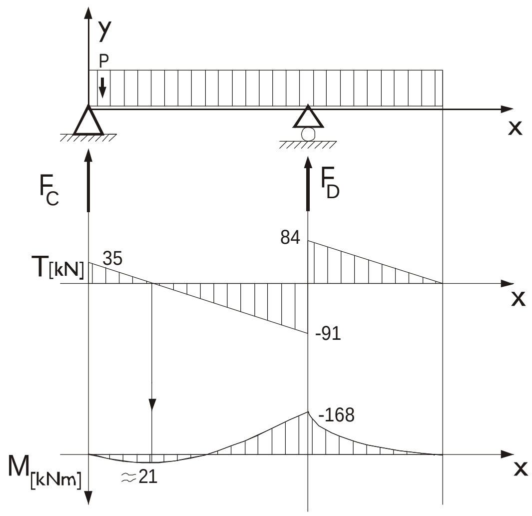
A veszélyes keresztmetszet tehát„D” alátámasztásnál van; x=6 m-nél.

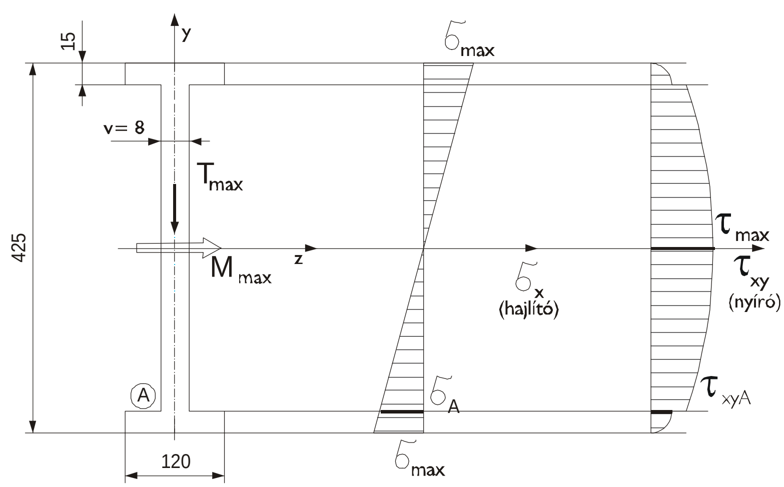
$$I_z = \frac{425^3 \cdot 120}{12} - \frac{(425-30)^2 (120-8)}{12} \cong 19244 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$\pm \sigma_{max}$ = 185,5 MPa

Nyírófeszültség:

$$t_{xy} = \frac{T_y \cdot M_{st}(z)}{I_z \cdot v}$$





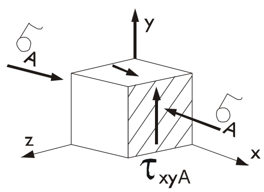
11.8

A fél keresztmetszet statikai nyomatéka a hajlítás tengelyére:

$$M_{st(Z)} = 212{,}5 \cdot 120 \cdot \frac{212{,}5}{2} - 197{,}5 \cdot 112 \cdot \frac{197{,}5}{2} = 525025 \quad mm^3$$

$$t_{MAX} = \frac{T_{max} \cdot M_{st(Z)}}{I_Z \cdot v} = 31{,}04 \quad MPa$$

Az „A” pont feszültségi állapota:



$$\sigma_A = -\frac{M_{max}}{I_z}\cdot y_A \quad ; \quad y_A = 197{,}5$$

$$\tau_{xyA} = \frac{T_{max}\cdot M_{st\,öv}}{I_z \cdot v_{gerinc}}$$

$$\sigma_{redA} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2}$$

$$M_{st\,öv} = 120\cdot 15\cdot\left(212{,}5 - \frac{15}{2}\right) = 369000 \quad mm^3$$

$$t_{xyA} = 21{,}8 \quad MPa \qquad s_A = -172{,}4 \quad MPa$$

$$s_{redA} = 177{,}8 \quad MPa$$

11.9. A befogás helyén ébrednek a maximális igénybevételek:

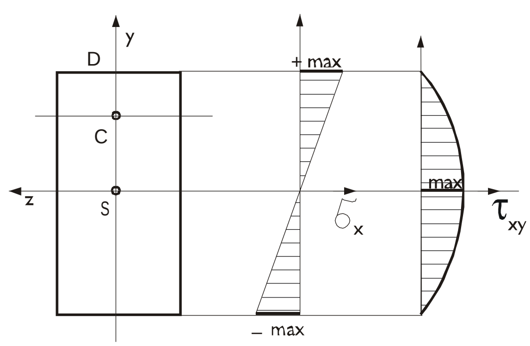
$$T_{y\,max} = 30 \quad kN \quad ; \quad M_{z\,max} = 30\cdot 0{,}05 = 1{,}5 \quad kNm$$

$$\text{"S"} \quad \text{pont}: \quad \sigma_x = 0 \quad ; \quad \tau_{xy\,max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T_{y\,max}}{A} = \frac{3}{2}\cdot\frac{30\cdot 10^3}{20\cdot 60} = 37{,}5 \quad MPa$$

$$\text{"C"} \quad \text{pont}: \quad \sigma_x = \frac{M_{z\,max}}{I_z}\cdot y_c = \frac{1{,}5\cdot 10^6}{\frac{60^3\cdot 20}{12}}\cdot 20 = 83{,}3 \quad MPa \quad ;$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_{y\,max}\cdot M_{mst\,(z)}}{I_z \cdot v} = \frac{30\cdot 10^3\cdot(20\cdot 10\cdot 25)}{\frac{60^3\cdot 20}{12}\cdot 20} = 20{,}8 \quad MPa$$

$$\text{"D"} \quad \text{pont}: \quad \sigma_{max} = \frac{M_{z\,max}}{I_z}\cdot y_{max} = \frac{1{,}5\cdot 10^6}{\frac{60^2\cdot 20}{6}} = 125 \quad MPa \quad ; \quad \tau_{xy} = 0$$



11.9

Mivel $\sigma_{max} < \sigma_M$ nem felel meg a rúd !

11.10.

A veszélyes helyen (x=1,5 m-nél; középen) a keresztmetszet két szélső száljában ébredő hajlító feszültség:

„A” eset: $s_{hajl_{\max}} = \dfrac{M_{\max}}{I_z} \cdot \dfrac{d}{2}$, $\quad M_{\max} = \dfrac{F}{2} \cdot 1{,}5 \quad (kNm)$, $\quad I_z = \dfrac{d^4 p}{64}$

mivel $s_{\max} = s_M \quad ; \quad F = 83{,}7 \quad kN$

„B” eset: változik a keresztmetszet inerciája !

$$I_z = 2\left[0{,}11 r^4 + \frac{r^2 p}{2}\left(r - \frac{4r}{3p}\right)^2\right], \quad F \quad = \quad 134{,}3 \quad kN$$

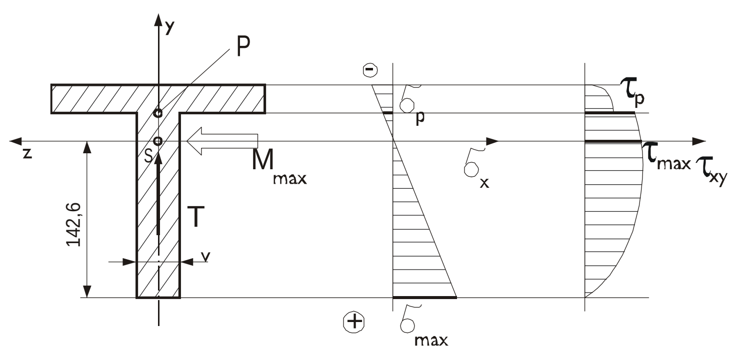
11.11.

$F_A = 27{,}975 \quad kN \qquad F_B = 25{,}975 \quad kN$

$M_{\max} = 67{,}535 \quad kNm \qquad x = 2{,}6 \quad m - nél, \quad itt \quad T = F_B$

$I_z = 28{,}8 \cdot 10^6 \quad mm^4$

$M_{st(P)} = 189600 \quad mm^3$



11.11

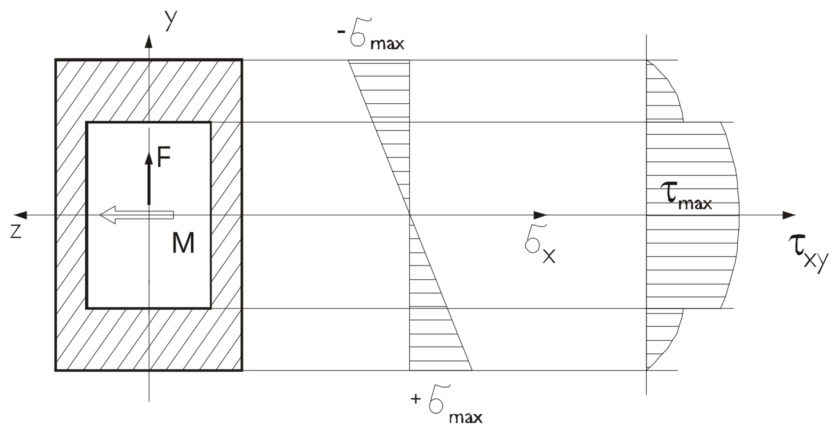
$$s_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max} = 334{,}6 \quad MPa \quad \rangle \quad s_M$$

Tehát nem felel meg a tartó !

$$s_P = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_P \qquad s_P = 87{,}8 \quad MPa$$

$$t_P = \frac{T \cdot M_{st(P)}}{I_z \cdot v} \quad , \qquad t_P = 8{,}6 \quad MPa; \quad s_{RED(P)} = 89{,}5 \quad MPa$$

11.12.



11.12

$$I_z = \frac{30 \cdot 50^3}{12} - \frac{20 \cdot 30^3}{12} \quad ; \quad M_{stfél(z)} = 25 \cdot 30 \cdot 12{,}5 - 15 \cdot 30 \cdot 7{,}5$$

$$s_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max} \quad ; \quad t_{\max} = \frac{F \cdot M_{stfél(z)}}{I_z \cdot v} \quad (v = 2 \cdot 5 = 10$$

$$I_z = 267500 \quad mm^4 \quad ; \quad s_{\max} = 93{,}46 \quad MPa$$

$$M_{st\ fél} = 7125 \quad mm^3 \quad ; \quad t_{\max} = 66{,}6 \quad MPa$$

$$M_{st(1)-(2)} = 10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000 \quad mm^3$$

$$t_1 = 18{,}7 \quad MPa \quad (v = 30), \quad t_2 = 56{,}2 \quad MPa \quad (v = 10)$$

11.13. Veszélyes keresztmetszet a befalazásnál:

$$M_{\max} = 3{,}1 \quad kNm \quad ; \quad T_{\max} = 2{,}6 \quad kN$$

$$Ha \quad s_{\max} \le s_M \to K_{z\min} = \frac{M_{\max}}{s_M}$$

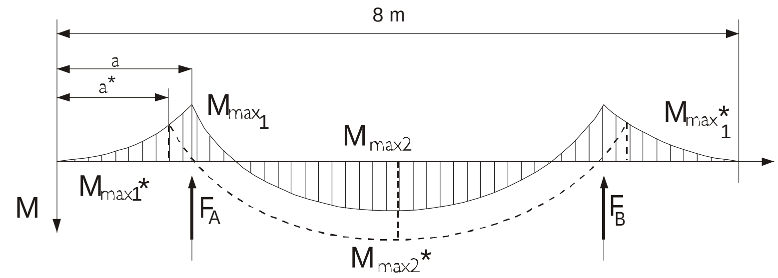
$$K_{z\min} = 22142{,}9 \quad mm^3 = 22{,}14 \cdot 10^{-6} \quad m^3$$

MSZ 326-ból választva: $K_z = 22{,}4 \cdot 10^{-6} \quad m^3$ (szabványos).
az U 180-as szelvényhez tartozó érték.

11.14. A gerenda hajlító nyomatéki ábrája változik a felfüggesztések helyének függvényében:

$Ha \quad M_{\max 1} = M_{\max 2}$

akkor ez a „legkedvezőbb” eset.



11.14

$$\frac{p \cdot a^2}{2} = -p \cdot \frac{4^2}{2} + F_A \cdot (4-a) \; ahol \; p = 900 \; N/m \quad és \qquad F_A = F_B = 3600 \text{ N}$$

a felfüggesztésnél ébredő erők a = 1,652 m

Ekkor $M_{\max} = \dfrac{900 \cdot 1{,}657^2}{2} = 1{,}236 \quad kNm \qquad K_x = 1460 \cdot 10^3 \quad mm^3$ (táblázatból)

és $\quad s_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{K_x} \cong 0{,}85 \quad MPa$

11.15.

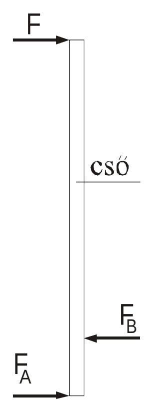
$F_A = 2000 \quad N; \qquad F_B = 2500 \quad N; \quad M_{\max} = 1 \quad kNm$

$(F_B - nél)$

$$\mathrm{K_{min}} = \frac{\mathrm{M_{max}}}{\sigma_\mathrm{M}} = 5555{,}5 \quad \mathrm{mm^3}$$

$\mathrm{K_{(cső)}} = \dfrac{(\mathrm{D^4 - d^4})\pi}{64} \cdot \dfrac{2}{\mathrm{D}}$ alapján, ha

$\mathrm{D} = 1{,}2 \quad \mathrm{d}; \qquad \mathrm{d} \cong 40 \quad \mathrm{mm}, \qquad \mathrm{D} = 48 \quad \mathrm{mm}$



11.15

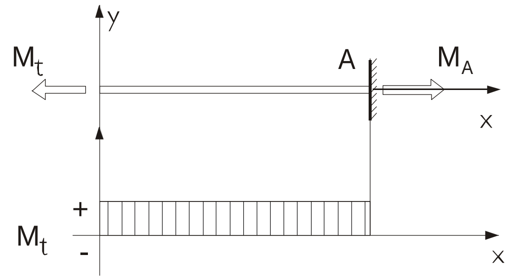
12.0 CSAVARÁS

12.1.

$$M_A = M_t = 1{,}8 \quad kNm$$

$$t_{CSAV_{MAX}} = \frac{M_T}{i_P} \cdot r_{MAX}$$

$$j = \frac{M_T \cdot l}{I_P \cdot G}$$



12.1

$$I_p = \frac{d^4 p}{32} = 2{,}51 \cdot 10^5 \quad mm^4$$

$r_{\max} = 20 \quad mm$ (a keresztmetszet kerületi pontjai)

$$t_{\max} = 143{,}4 \quad MPa \qquad j = 0{,}45 \quad rad$$

12.2.

$$t_B = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_B \qquad t_C = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_C$$

$$I_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)p}{32} \quad ; \quad r_B = 49 \quad mm, \qquad r_C = 51 \quad mm$$

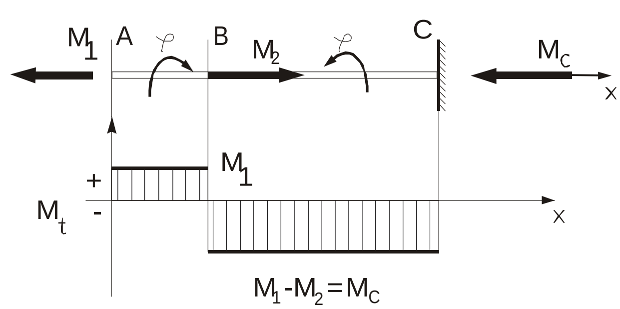
$$t_B = 18{,}7 \quad MPa, \qquad t_C = 19{,}5 \quad MPa$$

12.3.

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0$$

$$0 = \frac{\left(M_1 - M_2\right) \cdot l_{CB}}{I_p \cdot G} + \frac{M_1 \cdot l_{BA}}{I_p \cdot G}$$

$$M_1 = \frac{M_2 \cdot l_{CB}}{l_{CB} + l_{BA}} = 8 \quad kNm$$



12.3

12.4.

$$d_{\min} = \sqrt[4]{\frac{M_t \cdot l \cdot 32}{j_M \cdot G \cdot p}} \quad ; \quad d_{\min} = 79{,}6 \approx 80 \quad mm$$

$$t_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{K_p}$$

$$t_{\max} = \frac{900 \cdot 10^3}{\frac{80^3 p}{16}} = 8{,}96 \quad MPa$$

12.5.

$$t_M \geq t_{\max} = \frac{M_t}{K_{p\min}} \qquad K_p = \frac{d^3 p}{16} \quad d = 43{,}35 \approx 45 \quad mm$$

$$j = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G} = \frac{0{,}8 \cdot 10^3 \cdot 50}{\frac{45^4 \cdot p}{32} \cdot 85} = 0{,}0117 \quad rad$$

így: $j_{Meg} / l = 0{,}5 \quad m - re!/ = \frac{1^0}{8} = 0{,}125^0 = 0{,}002 \quad rad \langle j_{Meg}$

$$ezért \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{M_t \cdot l \cdot 32}{j_{meg} \cdot G \cdot p}} - b\H{o}\H{o}\, számítva$$

$d_{szüks} \cong 70$ mm

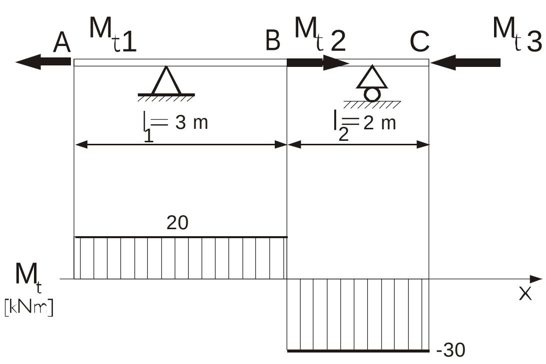
12.6.

$$M_{t1} - M_{t2} + M_{t3} = 0$$

$$M_{t3} = 30 \quad kNm = M_{\max}$$

$$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \cdot 16}{\tau_M \cdot \pi}} = 136{,}6 \approx 140 \quad mm$$

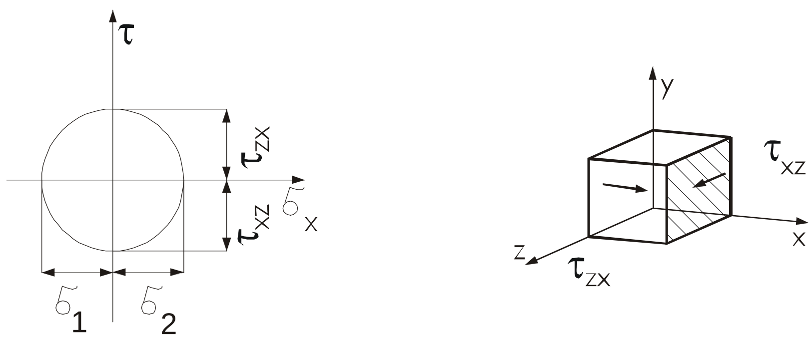
$$\varphi_{AB} = \frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_p \cdot G} = 0{,}018 \quad rad$$



12.6

12.7.

„A" pont feszültségi állapota kiskockán ábrázolva:



12.7

$$\tau_{cs\,max} = \sigma_1 = |\sigma_2| = \frac{F \cdot D}{\frac{d^4\pi}{32}} \cdot \frac{d}{2} = 47{,}15 \quad \text{MPa}$$

12.8.

$$t_M \geq t_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_{\max} \rightarrow K_p = \frac{I_p}{r_{\max}}$$

a.) tömör kör-keresztmetszetnél: $K_p = \frac{d^4\pi}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{d^3\pi}{16}$

b.) cső-keresztmetszetnél: $K_p = \frac{(D^4 - d^4)p}{32} \cdot \frac{2}{D} = \frac{15d^3p}{32}$

$ha \quad D = 2d$

a.) d=55,4 mm b.) d=28,3 mm és D=56,6 mm

A tömegek: $m = V \cdot r \quad , \quad ahol \quad r = 7{,}85 \cdot 10^3 \quad kg/m^3$

a.) m=2,84 kg b.) m=2,22 kg

Tehát a csőkeresztmetszetet célszerű alkalmazni kisebb önsúlya miatt.

12.9.

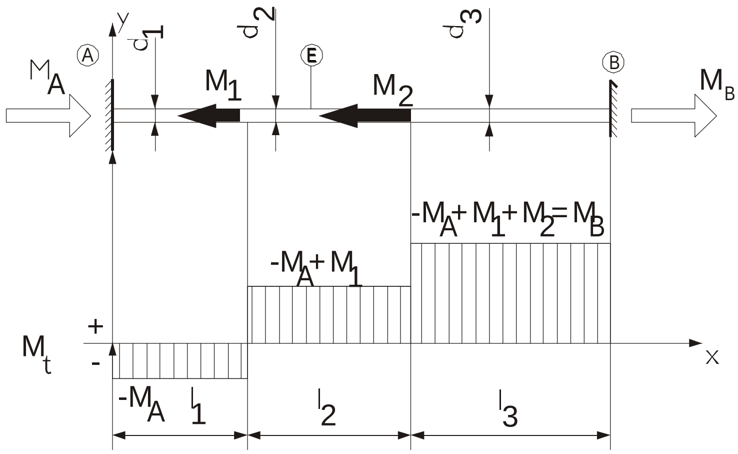
A befalazásnál $M_t = M_1 + M_2 = 17$ kNm nyomaték ébred.
A tartó belső energiája a két különböző átmérőjű szakaszra külön írható fel.

$$U_{össz} = U_1 + U_2 = \frac{M_t^2 \cdot l_1}{2I_{p1} \cdot G} + \frac{M_2^2 \cdot l_2}{2I_{p2} \cdot G}$$

$$U_{össz} = 12{,}6 \cdot 10^4 \quad \text{Nmm}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l_1}{I_{p1} \cdot G} + \frac{M_2 \cdot l_2}{I_{p2} \cdot G} = 0{,}019 \quad \text{rad}$$

12.10.



12.10

M_A és M_B irányát előzetesen feltételezve. (Az esetleges negatív eredmény ellentett irányt jelentene !)

$$M_1 = F_1 \cdot D_1 = 0{,}8 \quad kNm$$

$$M_2 = F_2 \cdot D_2 = 3{,}2 \quad kNm$$

Egyensúly esetén:

$$M_1 + M_2 - M_A - M_B = 0$$ és

a befalazás miatt:

$$j_{AB} = j_1 + j_2 + j_3 = 0$$

Részletezve:

$$\frac{-\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{l_1}}{\mathrm{I_{p1}} \cdot \mathrm{G}} + \frac{(-\mathrm{M_A} + \mathrm{M_1}) \cdot \mathrm{l_2}}{\mathrm{I_{p2}} \cdot \mathrm{G}} + \frac{(-\mathrm{M_A} + \mathrm{M_1} + \mathrm{M_2}) \cdot \mathrm{l_3}}{\mathrm{I_{p3}} \cdot \mathrm{G}} = 0$$

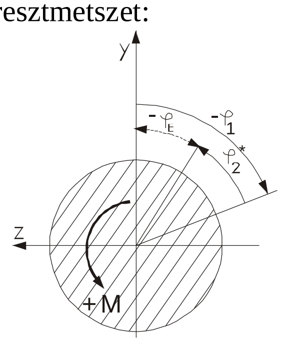
$$\mathrm{M_A} = \frac{\mathrm{M_1}\left(\frac{\mathrm{l_2}}{\mathrm{l_2^4}} + \frac{\mathrm{l_3}}{\mathrm{d_3^4}}\right) + \mathrm{M_2}\frac{\mathrm{l_3}}{\mathrm{d_3^4}}}{\frac{\mathrm{l_1}}{\mathrm{d_1^4}} + \frac{\mathrm{l_2}}{\mathrm{d_2^4}} + \frac{\mathrm{l_3}}{\mathrm{d_3^4}}}$$

M_A = 0,37kNm $\rightarrow$, M_B = 3,63 kNm $\rightarrow$ (az ábrán jelölt értelmek szerint).

$$t_{E\max} = \frac{-M_A + M_1}{I_{p2}} \cdot \frac{d_2}{2} \quad , \quad t_{E\max} = 34{,}2 \quad MPa$$

$$j_E = \underbrace{\frac{-M_A \cdot l_1}{O_{p1} \cdot G}}_{"j_1"} + \underbrace{\frac{(-M_A + M_1) \cdot \frac{l_2}{2}}{I_{p2} \cdot G}}_{"j_2*"} - 0{,}012 \quad rad = -0{,}69^0$$

(E) keresztmetszet:

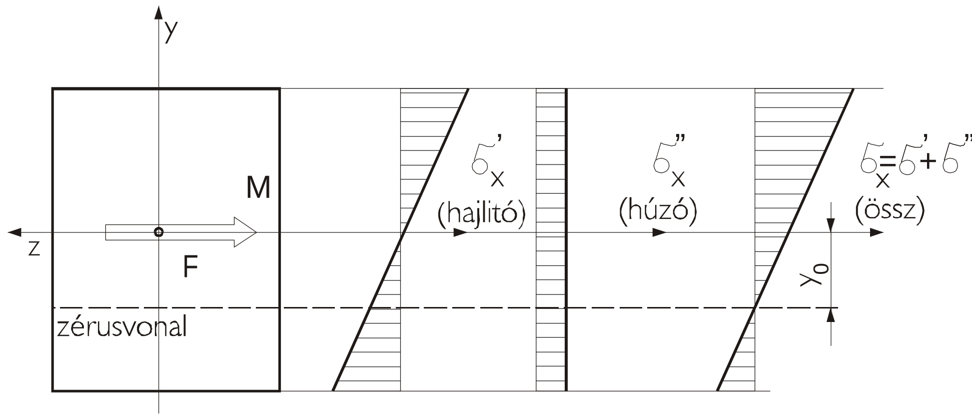


12.10

A negatív előjel értelmezését az ábrán, az elcsavarodási irányok magyarázzák.

13.0 EGYIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

13.1.



13.1

A keresztmetszetben csak normálfeszültségek ébrednek, a húzás és hajlítás hatására:

$$\pm\sigma'_{x\,max} = \frac{M}{I_z}\cdot y_{max} = \frac{2\cdot 10^6 (Nmm)}{\frac{40\cdot 60^3}{12}\left(mm^4\right)}\cdot 30(mm) = 83{,}3 \quad MPa$$

$$\sigma''_x = \frac{F}{A} = \frac{120\cdot 10^3}{40\cdot 60} = 50 \quad MPa$$

$$+\sigma_{x\,max} = 133{,}3 \quad MPa; \qquad -\sigma_{x\,max} = 33{,}3 \quad MPa$$

$$\text{ahol}: \quad \sigma''_x = \left|-\sigma'_x\right| \rightarrow \quad y_0 = \sigma''_x\cdot\frac{I_z}{M} \qquad y_0 = 18 \quad mm$$

13.2.

A tartóban ébredő normálerő a 45^0-os felfüggesztés miatt; N=1,5 kN végig.
A legnagyobb hajlító nyomaték a két terhelőerő közti szakaszon M_{max} =1,5 kNm
A szabványos szelvényű idomacél jellemzői táblázatból; $I=171.10^{-8}$ m^4 és
A=1060 mm^2

$$\sigma'_{max(hajl.)} = \frac{M_{max}}{I_t}\cdot 50 = 43{,}86 \quad MPa$$

$$\sigma''_{húzó} = \frac{N}{A} = 1{,}4 \quad MPa$$

q_{max}=σ'+ σ"=45,3 MPa, tehát megfelel a tartó !

A zérusvonal helye az előző példához hasonlóan számolva:
y_0 =1,6 mm

13.3.

F erő nemcsak húzó igénybevételt jelent, hanem hajlítja is a rudat,y tengely körül.

$$M_y = 15 \cdot 0{,}015 \quad \text{kNm}$$

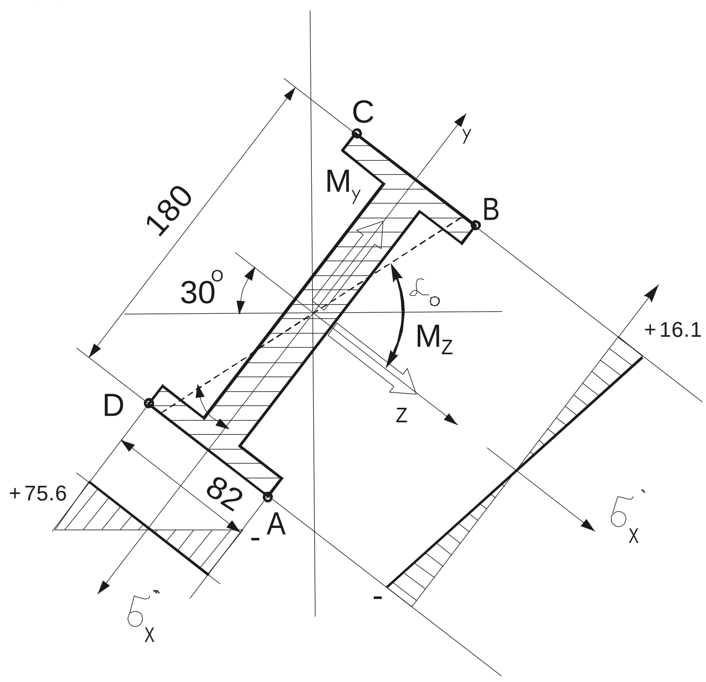
$$\sigma^{!}_{z(\text{húzó})} = \frac{F}{A} = \frac{15 \cdot 10^3 (\text{N})}{30 \cdot 18 \cdot (\text{mm}^2)} = 27{,}8 \quad \text{MPa},$$

$$\sigma^{''}_{z(\text{hajl.})} = \pm \frac{M_y}{I_y} y_{max} = -\frac{0{,}15 \cdot 10^6}{\frac{18 \cdot 30^3}{12}} \cdot \frac{30}{2} = \pm 55{,}6 \quad \text{MPa}$$

így a függőleges rúd baloldalán a húzott szálakban:

$$+\sigma_z = \sigma^{'}_z - \sigma^{''}_z \rightarrow \quad -\sigma_{z\,max} = 27{,}8 \quad \text{MPa}$$

13.4.



Az M nyomatékvektor felbontható komponensekre:

$$M_z = 2{,}6 \quad \text{kNm}$$

$$M_y = 1{,}5 \quad \text{kNm}$$

$$\pm \sigma^{'}_{x\,max}, = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$

$$\pm \sigma^{''}_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max}$$

táblázatból: $I_z = 1450.10^{-8}$ m^4

$I_y = 81{,}3.10^{-8}$ m^4

13.4

Semleges tengely helye; ahol az eredő feszültség nulla.

$$s^{'}_x = \left| -s^{''}_x \right| \quad \text{alapján} \quad \frac{y_0}{z_0} = \text{tg}\,\alpha_0 = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z}; \quad \alpha_o = 84{,}4^o\text{-ra „z”-től felfelé}$$

$$s_A = -s^{'}_x - s^{''}_{x'} \quad s_B = +s^{'}_x - s^{''}_x \quad s_C = s^{'}_x + s^{''}_x \quad s_D = -s^{'}_x + s^{''}_x$$

$$s_A = -91{,}9 \quad MPa, \quad s_B = -59{,}7 \quad MPa, \quad s_C = 91{,}9 \quad MPa, \quad s_D = 59{,}7 \quad MPa$$

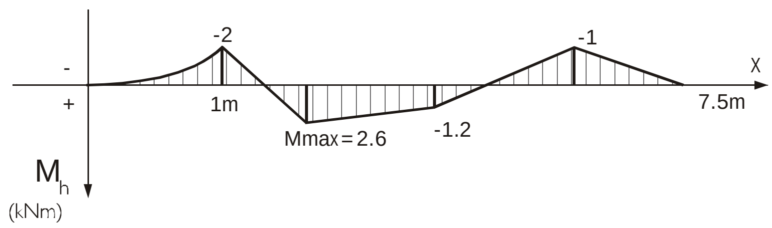
13.5.

Reakcióerők ; a baloldali alátámasztásra (A) felírt egyensúly alapján:

$$F_B = \frac{-4\cdot 0{,}5 + 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6{,}5}{5} = 3{,}7 \quad kN \uparrow$$

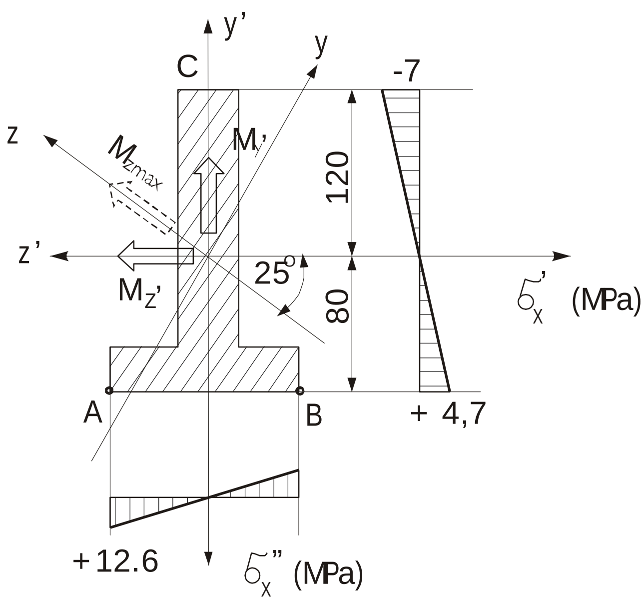
$$F_A = 4 + 3 + 2 + 1 - 3{,}7 = 6{,}3 \quad kN \uparrow$$

így a hajlítónyomatéki függvény:



$M_{z\,max}$=2,6 kNm (F_1 támadáspontjánál), x = 3 m-nél

A veszélyes keresztmetszetet elforgatva ábrázolva:



13.5

$M_{y'} = 1{,}1 \quad kNm$

$M_{z'} = 2{,}36 \quad kNm$

az M_{zmax} komponensei.

Statikai jellemzők:

$$y'_s = \frac{120\cdot 30\cdot 15 + 40\cdot 170\cdot 115}{120\cdot 30 + 40\cdot 170}$$

$$y'_s = 80{,}4 \approx 80 \quad \mathrm{mm}$$

$$I'_z = \left[\frac{30^3\cdot 120}{12} + 65^2\cdot 30\cdot 120\right] + \left[\frac{170^3\cdot 40}{12} + 35^2\cdot 40\cdot 170\right] = 4019\cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I'_y = \frac{120^3\cdot 30}{12} + \frac{40^3\cdot 170}{12} \cong 522{,}6\cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$s'_x = \frac{M'_z}{I'_z}\cdot y' \qquad -s'_{x\max} = \frac{2{,}35\cdot 10^6}{4018\cdot 10^4}\cdot 120 = 7 \quad MPa$$

$$s''_x = \frac{M'_y}{I'_y}\cdot z' \qquad \pm s''_{x\max} = \frac{1{,}1\cdot 10^6}{522\cdot 10^4}\cdot 60 = 12{,}6 \quad MPa$$

$$\left(+s'_{\max} = \frac{2{,}35\cdot 10^6}{4018\cdot 10^4}\cdot 80 = 4{,}7 \quad MPa\right)$$

Tehát: $\sigma_A = 17{,}3 \quad \mathrm{MPa}, \qquad \sigma_B = 7{,}9 \quad \mathrm{MPa}, \qquad \sigma_C = -7 \quad \mathrm{MPa}$

13.6.

A megoszló terhelés hatására az AB szakaszon nyomó és hajlító igénybevétel lép fel;
$N_x = F_{nyomó}$ = 16.0,5 = 8 kN, és $M_z = M_{hajl}$ = 16.0,5 = 2 kNm végig a függőleges
rúdban

Nyomásból: $\sigma'_x = \frac{N_x}{A} = \frac{-8\cdot 10^3(\mathrm{N})}{1420(\mathrm{mm}^2)} = -5{,}6 \quad \mathrm{MPa}$

Hajlításból: $s''_{x\max} = \frac{M_z}{K_z}\cdot = \frac{2\cdot 10^6(Nmm)}{54{,}7\cdot 10^3(mm^3)} = \pm 36{,}6 \quad MPa$ (A, és K_z értékei táblázatból!)

$\sigma_{x\,max}$= |-42,2 MPa| , ami kisebb mint σ_M=80 MPa, tehát a tartó megfelel !

13.7.

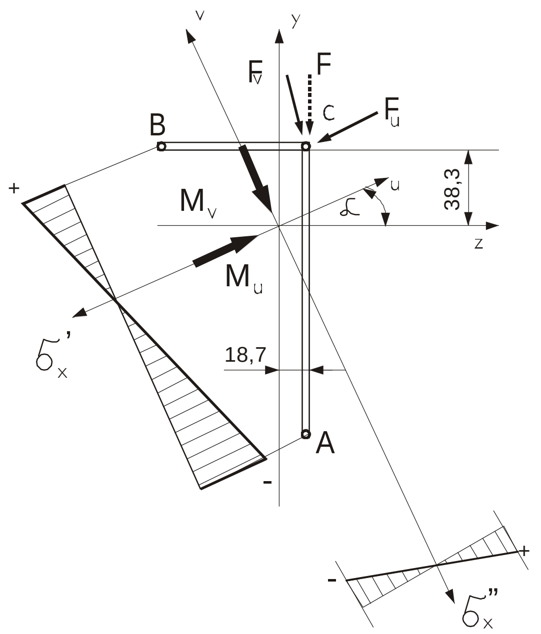
A keresztmetszet nyomatéki főtengelyei u; v; így kétirányú hajlításra bontható a terhelés. (Mivel feltételezzük, hogy ezek átmennek a nyírási középponton, így csavaró-hatás nincs !)

$$M_u = F_v\cdot l \quad , \quad M_v = F_u\cdot l$$

Maximális nyomatékok a befalazásnál lépnek fel.

Táblázatból:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}441 \rightarrow \alpha = 23{,}8^0$$



$$M_u = 5 \cdot \cos 23{,}8 \cdot 1 = 4{,}57 \quad kNm$$
$$M_v = 5 \cdot \sin 23{,}8 \cdot 1 = 2{,}02 \quad kNm$$
$$\sigma'_x = \frac{M_u}{I_u} \cdot v \quad \text{és} \quad \sigma''_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u$$
$$I_u = 261 \cdot 10^4 \quad mm^4$$
$$I_v = 45{,}8 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

A vizsgált pontok u, v koordinátái a geometriából – α segítségével – felírhatók, pl.:

$$u_A = y_A \cdot \sin a - z_A \cdot \cos a = 15{,}9 \quad mm$$
$$v_A = y_A \cdot \cos\alpha + z_A \cdot \sin\alpha = 82{,}3 \quad mm$$

13.7

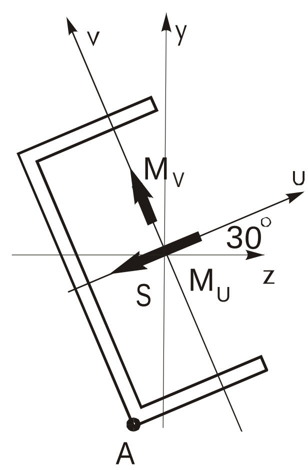
„A" pont feszültségei:

$$s'_{xA} = \frac{4{,}51 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{261 \cdot 10^4} \cdot (-82{,}3) = -142{,}2 \quad MPa$$
$$s''_{xA} = \frac{2{,}01 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{45{,}8 \cdot 10^4} \cdot (-15{,}8) = -69{,}3 \quad MPa$$
$$\sigma_{xA(RED)} = -\sigma'_{xA} - \sigma''_{xA} = -211{,}5 \quad MPa$$

Ugyanígy: $s_{xB} = -74{,}8 \quad MPa, \qquad s_{xC} = 191{,}3 \quad MPa$

$([u_B; v_B] = [40{,}6; 59{,}8] \qquad [u_C; v_C] = [32{,}6; 27{,}9])$

13.8.



13.8

13.8.

A maximális hajlítónyomatékok a tartó közepén x=2,6 m-nél számolhatók, a komponensekre bontott reakcióerő (F=6,7 kN) nyomatékaiból:

$$M_u = F_v \cdot \frac{l}{2} - Q_v \cdot \frac{l}{4} \cong 7{,}6 \quad kNm$$

$$M_v = F_u \cdot \frac{l}{2} - Q_u \cdot \frac{l}{4} \cong 4{,}4 \quad kNm$$

$$I_u = 3600 \cdot 10^4 \quad mm^4, \quad I_v = 248 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

főinerciák értékei (táblázatból)

$$s'_x = \frac{M_u}{I_u} \cdot v \quad és \quad s''_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u$$

„A” pontban:

$$s_{xA} = s'_{xA} + s''_{xA} = \frac{7{,}5 \cdot 10^6}{3600 \cdot 10^4} \cdot 120 + \frac{4{,}4 \cdot 10^6}{248 \cdot 10^4} \cdot 22{,}3 = 64{,}9 \quad MPa$$

$$s_{xB} = -s'_{xB} - s''_{xB} = -\frac{7{,}5 \cdot 10^6}{3600 \cdot 10^4} \cdot 120 - \frac{4{,}4 \cdot 10^6}{248 \cdot 10^4} \cdot 62{,}7 = -136{,}6 \quad MPa$$

13.9.

A hajlításból adódó maximális húzófeszültséggel egyező értékű nyomófeszültséget kell ébreszteni a keresztmetszeten, így a baloldali szélső szálakban nulla, a többi helyen csak negatív feszültség ébred:

$$s'_{x(nyomó)} = \frac{N}{A} \quad és \quad s''_{x\max(hajl.)} = \frac{M}{I_Z} \cdot y_{\max}$$

$$s'_X = s''_X - bőő \qquad N = A \cdot \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max} = 80 \cdot 40 \cdot \frac{1 \cdot 10^3}{\frac{80^3 \cdot 40}{12}} \cdot \frac{80}{2} = 75 \quad kN$$

$$\left(-s_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{K_t} = \frac{75 \cdot 10^3}{80 \cdot 40} + \frac{1 \cdot 10^6}{\frac{80^2 \cdot 40}{6}} = 46{,}9 \quad MPa \right)$$

13.10.

„K” keresztmetszet terhelései (jobbról számítva):

N=F=125 kN

$$M_z = F_B \cdot 4 + F \cdot 2 = 500 \quad kNm$$

$$\left(F_B = \frac{125 \cdot 2}{4} = 62{,}5 \quad kNm \downarrow \right)$$

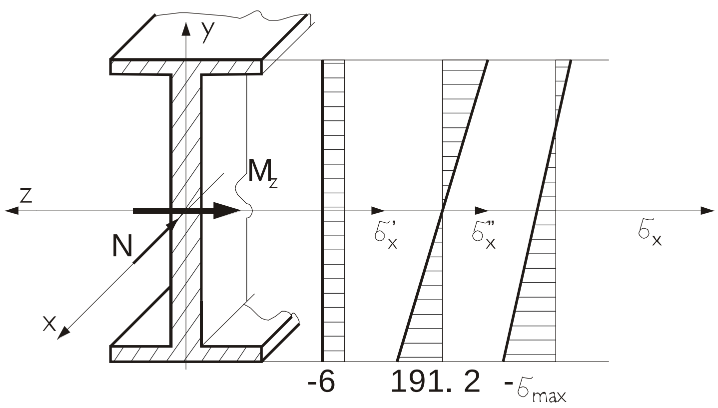
$$s_x' = \frac{-N}{A} \qquad s_x' = -6{,}5 \quad MPa\ \acute{a}lland\acute{o}$$

$$s_x'' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \qquad s_{x\max}'' = 191{,}2 \quad MPa$$

Ahol a keresztmetszet jellemzői:

$$\mathrm{A} = 2 \cdot 40 \cdot 180 + 20 \cdot 320 = 20800\ \mathrm{mm}^2$$

$$\mathrm{I_y} = \frac{180 \cdot 400^3}{12} - \frac{160 \cdot 320^3}{12} = 52309 \cdot 10^4 \quad \mathrm{mm}^4$$



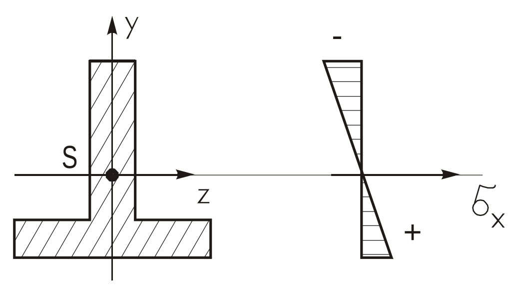
13.10

13.11.

A legnagyobb hajlítónyomatékból (középen) $\mathrm{M_z} = \mathrm{F_A} \cdot \frac{1}{2} - \mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{l}}{2} \cdot \frac{\mathrm{l}}{4} = 1 \quad \mathrm{kNm}$,

ennek hatására a „⊥” szelvényű tartó alsó szálaiban húzó-, a felső szálakban nyomófeszültség ébred:

$$+\sigma_{\max} = \frac{\mathrm{M_z}}{\mathrm{I_z}} \cdot \mathrm{y_s} = 22{,}05 \quad \mathrm{MPa} \qquad \text{(hajlító)}$$



13.11

$$\left(I_z = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 = 136 \cdot 10^4 \quad mm^4 \right)$$

$$\left(A = 2 \cdot 20 \cdot 60 = 2400 \quad mm^2 \right)$$

Ha csak 20 MPa húzófeszültség lehet:

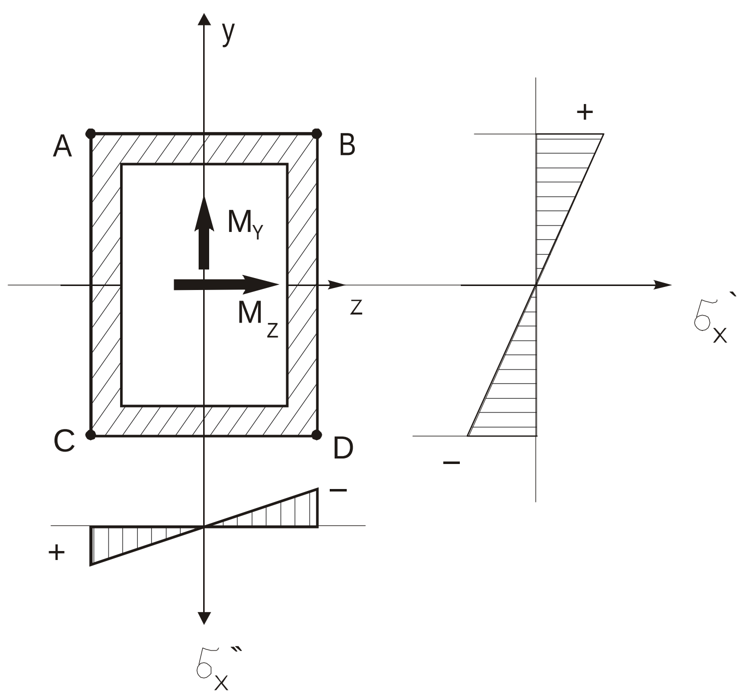
$$N = \left(+ s_{\max_{hajl.}} - s_{nyomó} \right) \cdot A = 2{,}05 \cdot 2400 = 4920 \quad N$$

13.12.

Az „M” nyomatékot M_z és M_y komponensekre bontjuk:

$$M_z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot M = 3{,}247 \quad kNm, \quad M_y = \frac{1}{2} M = 1{,}875 \quad kNm$$

A vízszintes tengely körüli hajlításból a „z” feletti szálakban húzó, alatta nyomófeszültség ébred; $\sigma'_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$. A függőleges tengely körüli hajlítás „y”-tól balra húzó, jobbra nyomófeszültséget okoz;



$$s''_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_A = \sigma'_{x\,max} + \sigma''_{x\,max}$$

$$\sigma_B = \sigma'_{x\,max} - \sigma''_{x\,max}$$

$$\sigma_C = -\sigma'_{x\,max} + \sigma''_{x\,max}$$

$$\sigma_D = -\sigma'_{x\,max} - \sigma''_{x\,max}$$

$$s'_{x\max} = \pm 92{,}8 \quad MPa$$

$$s''_{x\max} = \pm 59{,}2 \quad MPa$$

13.12

$$I_z = \frac{60 \cdot 80^3}{12} - \frac{44 \cdot 68^3}{12} \cong 140 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

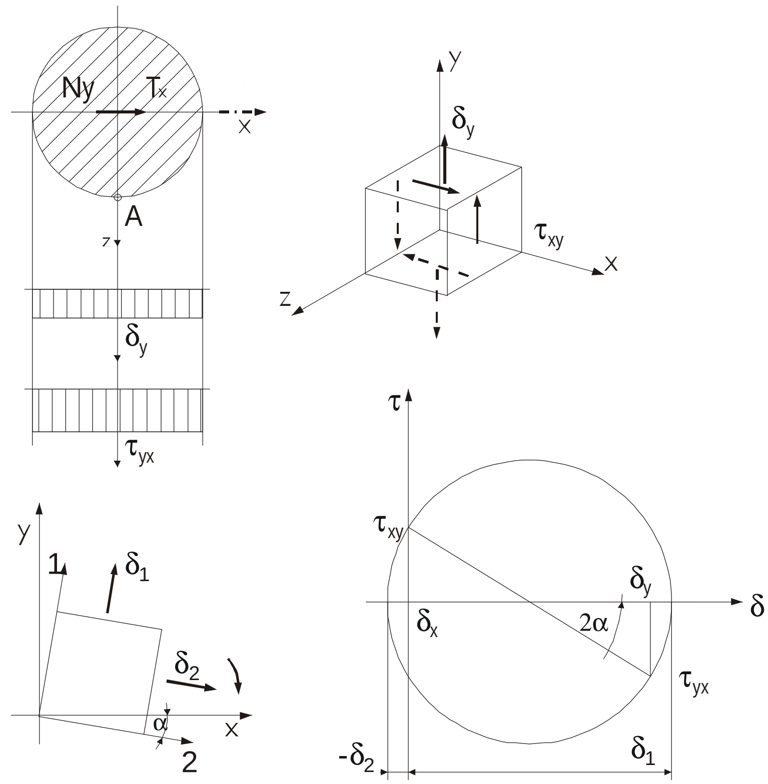
$$I_y = \frac{80 \cdot 60^3}{12} - \frac{68 \cdot 44^3}{12} \cong 95 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$s_A = 152 \quad MPa$, $s_B = 33{,}6 \quad MPa$, $s_C = -33{,}6 \quad MPa$,

$s_D = -152 \quad MPa$

14.0 TÖBBIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

14.1.



14.1

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2}{2}\right] + \tau_{xy}^2}$$

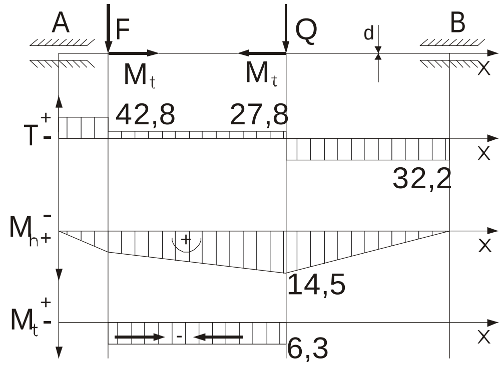
$$\sigma_y = \frac{N_y}{A} = \frac{F_1}{A_{szár}} = 48,6 \quad \text{MPa} \quad \text{húzás} \left(A_{szár} = \frac{d^2\pi}{4} \right)$$

$$\tau_{yx} = \frac{T_x}{A} = \frac{F_2}{A_{szár}} = 77,4 \quad \text{MPa} \quad \text{tiszta nyírás}$$

$s_1 = 105,4 \quad MPa$ $\qquad$ $s_2 = -56,8 \quad MPa$

$$tg2a = \frac{t_{yx}}{\frac{s_y - s_x}{2}} \qquad a = 36,3^0$$

14.2.



14.2

A méretezés a veszélyes keresztmetszet terheléseivel történik:

Reakcióerők:

$$F_B = \frac{0{,}13 \cdot 15 + 0{,}45 \cdot 60}{0{,}9} = 32{,}2 \quad kN \uparrow$$

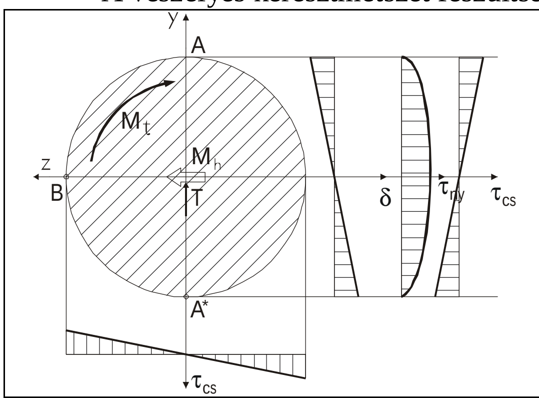
$$F_A = F + Q - F_B = 42{,}8 \quad kN \uparrow$$

$$M_{MAX} = 14{,}5 \quad kNm$$

$$T_{MAX} = F_B = 32{,}2 \quad kN$$

$$M_t = F \cdot \frac{D_2}{2} = Q \cdot \frac{D_1}{2} = 6{,}3 \quad kNm$$

A veszélyes keresztmetszet feszültségei:



A legnagyobb redukált feszültség „A”.A*” pontokban tehát:

$$s_{MEG} \geq s_{RED\,A} = \sqrt{s_h^2 + 4t_{cs}^2} = \sqrt{\frac{M_h^2}{K_t^2} + \frac{4M_{tt}^2}{K_p^2}}$$

$$s_{RED\,A} = \sqrt{\frac{M_h^2 + M_t^2}{K_t^2}} = \frac{M_{red}}{K_t}$$

$$\left(K_t = \frac{K_p}{2}! \right)$$

$$s_{RED_A} = \frac{M_{RED}}{\frac{d^3 p}{32}}; \qquad d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{M_{RED} \cdot 32}{s_{MEG} \cdot p}} \cong 119{,}3$$

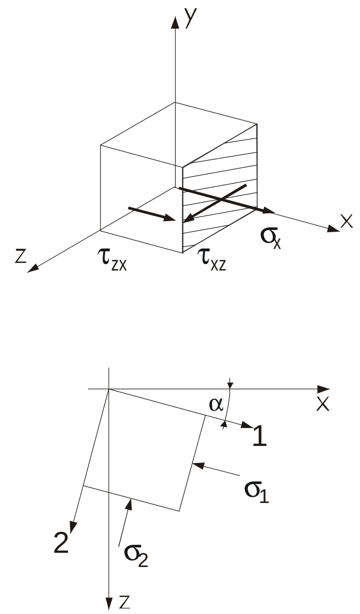
Ezt ellenőrizni kell „τ”-ra, mivel „B”-ben:

$$\tau_{MAX} = \tau_{csMAX} + \tau_{nyMAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{K_p} + \frac{4}{3} \quad \frac{T}{A}$$

$t_{\max} = 22{,}2 \quad MPa \; \langle \; t_{meg}$, tehát megfelel !

14.3.



A befalazásnál:

$T_y = F = 12{,}7$ kN ↑

$M_h = M_z = 12{,}7$ kNm

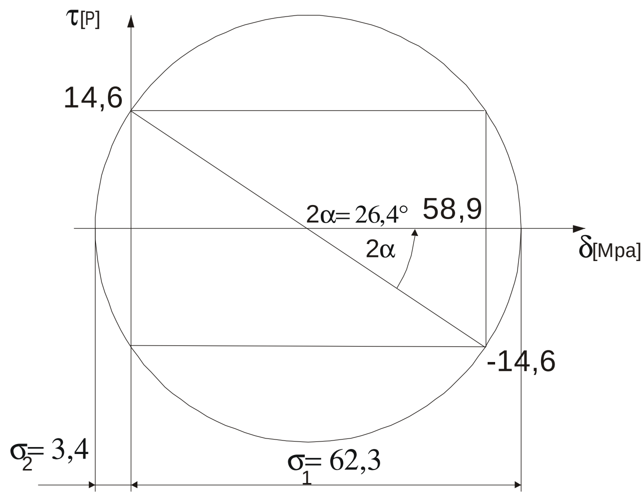
$M_t = 6{,}3$ kNm →

Az „A"-ban ébredő feszültségek:

$$s_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{d}{2} = 58{,}9 \quad MPa$$ a hajlításból

$$t_{xz} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = 14{,}6 \quad MPa$$ a csavarásból

$\tau_{xy} = 0$ a nyírásból



14.4.

A tengely egyensúlyából $M_{cs1} = M_{cs2}$ vagyis

$$F_1 \cdot \frac{D_2}{2} = F_2 \cdot \frac{D_1}{2} \rightarrow \qquad F_2 = 4 \quad kN \qquad M_{cs} = \frac{0{,}44}{2} \cdot 2 = 0{,}44 \quad kNm$$

F_1 és F_2 hatására ébredő reakcióerők:

$$F_B = \frac{4 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}6}{0{,}75} = 2{,}4 \quad kN \uparrow, \qquad F_A = F_1 + F_2 - F_3 = 3{,}6 \quad kN \uparrow$$

Legnagyobb hajlítónyomaték a kiskeréknél: $M_h = 0{,}15 \cdot 3{,}6 = 0{,}54 \quad kNm$

A hajlítás és csavarás együttes hatására: $M_{RED} = \sqrt{M_{hMAX} + M_{cs}} = 0{,}7 \quad kNm$

$$\sigma_{RED} = \frac{M_{red}}{K_t} \quad \text{alapján} \quad d_{min} = \sqrt[3]{\frac{M_{RED} \cdot 32}{\sigma_M \cdot \pi}} \cong 34 \quad \text{mm}$$

Ellenőrizzük nyírásra is:

$$\tau_{MAX} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^3}{\frac{34^2 \cdot \pi}{4}} + \frac{0{,}44 \cdot 10^6}{\frac{34^3 \cdot \pi}{16}} = 62{,}3 \quad \text{MPa} \quad \langle \quad \tau_M \text{, megfelel!}$$

14.5.

A tengely terhelése nyomás és csavarás, ami a kerületi pontokban ébreszti legnagyobb feszültségeket.

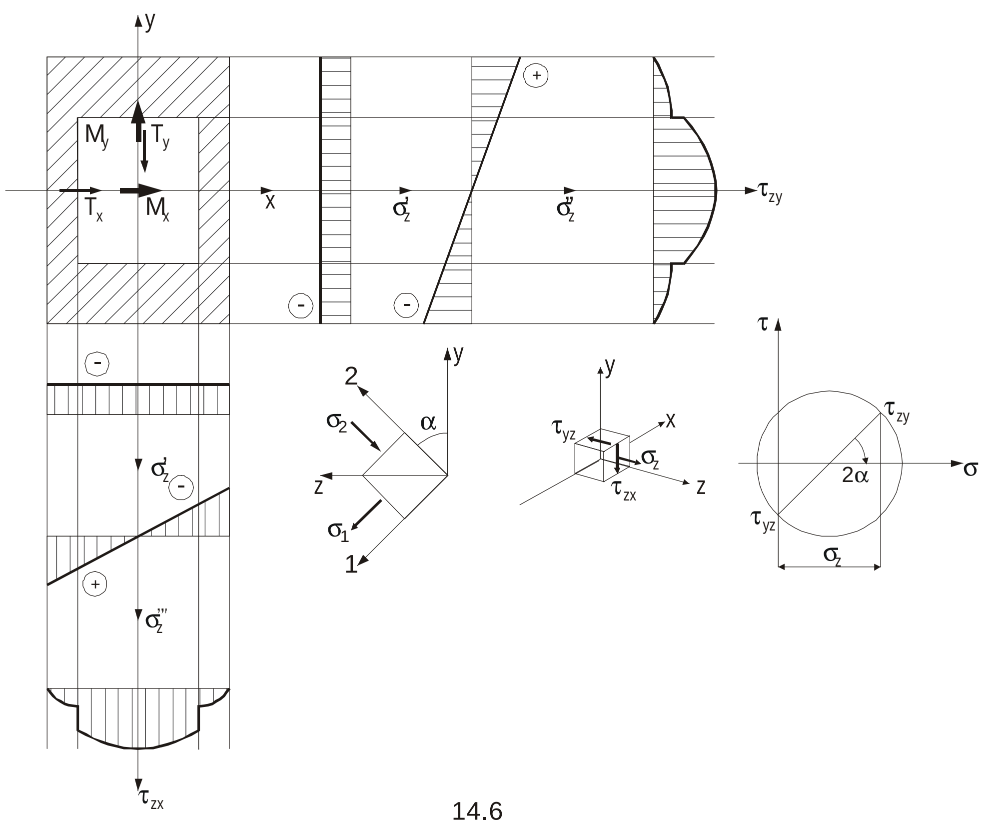
$$s_{nyomó} = \frac{F}{A_0} \quad \text{(minden pontban !)}$$

$$t_{csav_{max}} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{K_p} \quad \text{(a kerületen)}$$

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_{nyom}^2 + 4\tau_{csav}^2} = \sqrt{\left(\frac{12{,}6 \cdot 10^3}{\frac{40^2 \pi}{4}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1{,}7 \cdot 10^6}{\frac{40^3 \pi}{16}}\right)^2}$$

$$\sigma_{RED} \cong 271 \quad \rangle \quad \sigma_{meg} \text{, nem felel meg !}$$

14.6.



14.6

A feszültség-függvények maximumai:

$$s_{z}' = \frac{N}{A}; \quad \frac{70\cdot 10^{3}}{4{,}8\cdot 10^{3}} = 14{,}6 \quad MPa$$

$$s_{z}'' = \frac{M_{x}}{I_{x}}\cdot\frac{y}{2}; \quad \frac{12\cdot 10^{3}}{792\cdot 10^{-8}}\cdot 0{,}06 = 90{,}9 \quad MPa,$$

$$s_{z}''' = \frac{M_{y}}{I_{y}}\cdot\frac{x}{2}; \quad \frac{5\cdot 10^{3}}{184\cdot 10^{-8}}\cdot 0{,}03 = 81{,}5 \quad MPa$$

$$t_{zy} = \frac{T_{y}\cdot M_{stx}}{I_{x}\cdot v_{x}}; \quad \frac{30\cdot 10^{3}\cdot 90\cdot 10^{-6}}{792\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 17 \quad MPa$$

$$t_{zx} = \frac{T_{x}\cdot M_{sty}}{I_{y}\cdot v_{y}}; \quad \frac{20\cdot 10^{3}\cdot 42\cdot 10^{-6}}{184\cdot 10^{-8}\cdot 6\cdot 10^{-2}} = 7{,}6 \quad MPa$$

Ahol:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{stx}} = 60\cdot 60\cdot 30 - 40\cdot 30\cdot 15 = 90000 \quad \mathrm{mm}^{3}$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{sty}} = 120\cdot 30\cdot 15 - 60\cdot 20\cdot 10 = 42000 \quad \mathrm{mm}^{3}$$

a fél keresztmetszet statikai nyomatékai.

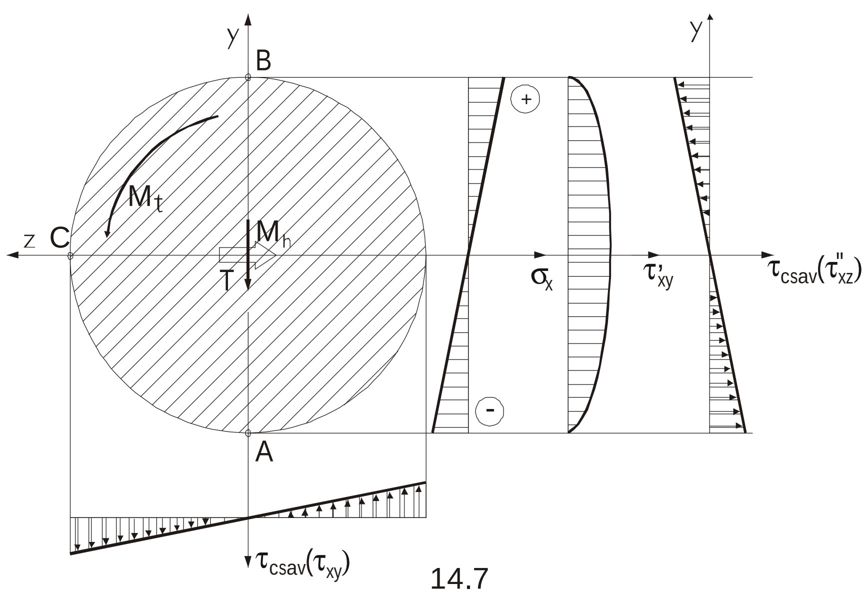
"A" pontban:

$$s_{z} = -s_{z}' + s_{z}''' = +66{,}4 \quad MPa$$

$$t_{zy} = t_{zyMAX} = 17 \quad MPa$$

$$s_{RED} = \sqrt{s_{z}^{2} + 4t_{zy}^{2}} = 74{,}6 \; MPa$$

14.7.



14.7

B pont:

$$\sigma_{hajl} = \sigma_x = \frac{M_h}{K_z} = \frac{0{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3}{\frac{40^3 \pi}{32}} = 47{,}8 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{csav} = \tau_{xz} = \frac{M_t}{K_p} = \frac{0{,}4 \cdot 10^6}{\frac{40^3 \cdot \pi}{16}} = 31{,}8 \quad \text{MPa}$$

$$\left(\tau_{nyíró} = 0 \quad !\right)$$

C pont:

$$\tau_{csav} = \tau'_{xy} = \frac{M_t}{K_p} = 31{,}8 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{nyíró} = \tau_{xy''} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{0{,}6 \cdot 10^3}{\frac{40^2 \pi}{4}} = 0{,}6 \quad \text{MPa}$$

$$\left(\sigma_{hajl} = 0\right)$$

Feszültségek: B-ben $s_{1,2} = \frac{s_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x}{2}\right)^2 + t_{xz}^2}$

C-ben $s_{1,2} = \pm\sqrt{\left(t'_{xy} + t''_{xy}\right)^2}$

$$s_{1B} = 63{,}6 \quad MPa, \quad s_{2B} = -15{,}9 \quad MPa, \quad tg\, 2a = \frac{t_{xz}}{\frac{s_x}{2}} = 26{,}5^0$$

$$s_{1C} = 32{,}4 \quad MPa \qquad s_{2C} = -32{,}4 \quad MPa \rightarrow \qquad a = 45^0$$

14.8.

A befalazás igénybevételei és feszültségeloszlásai hasonlóak a 14,7 feladathoz!

$$s_{hajl} = s_x = \frac{M_{hajl}}{I_z} \cdot \frac{D}{2} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6 \cdot 10^3}{\frac{\left(100^4 - 92^4\right) \cdot p}{64}} \cdot \frac{100}{2} = 64{,}7 \quad MPa$$

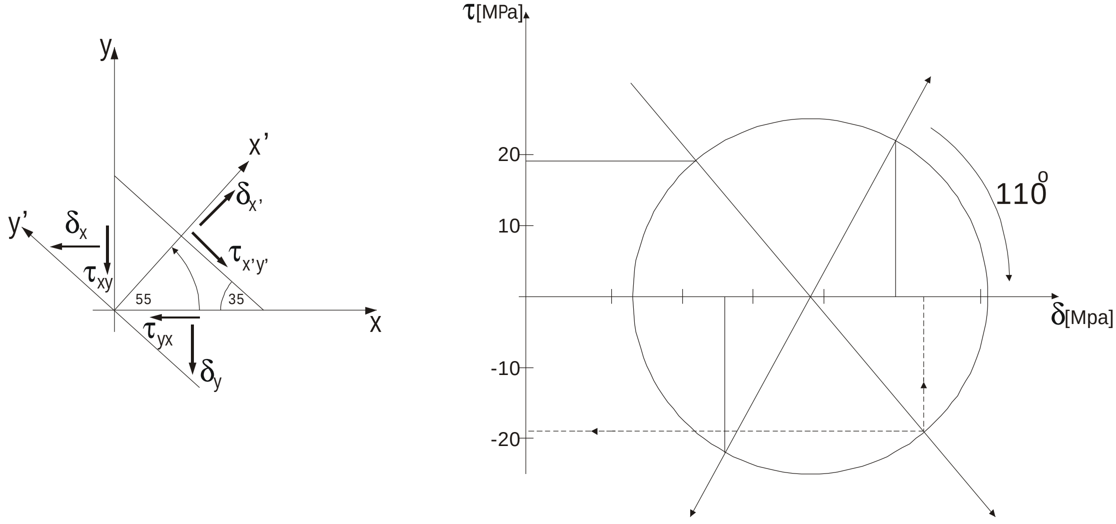
B pontban:

$$t_{csav} = t_{xz} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2 \cdot 10^6}{\frac{\left(100^4 - 92^4\right) \cdot p}{32}} \cdot \frac{100}{2} = 35{,}9 \quad MPa$$

$$\sigma_{1B} = 80{,}8 \quad \text{MPa} \quad \sigma_{2B} = -16 \quad \text{MPa} \qquad \alpha = 24^0$$

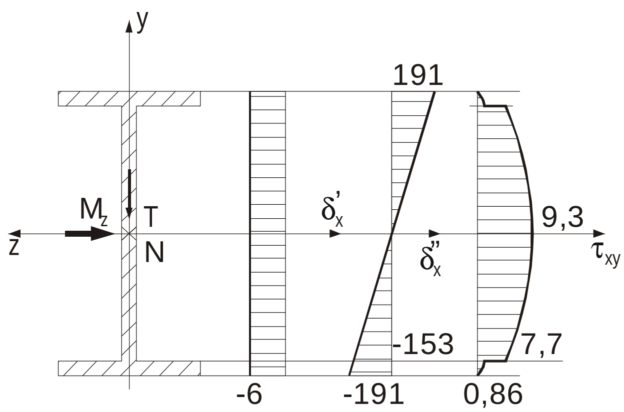
$$\sigma_{1C} = 40{,}9 \quad \text{MPa} \quad \sigma_{2C} = -\sigma_{1C} \qquad \alpha = 45^0$$

14.9.



14.9

14.10.



14.10

A keretre ható reakcióerők: $F_{Bx} = 0;\quad F_{By} = \dfrac{2 \cdot 125}{4} = 62{,}5 \quad kN \downarrow$

$F_{Ax} = F = 125 \quad kN \rightarrow; \qquad F_{Ay} = 62{,}5 kN \downarrow; \quad F_{By} = 62{,}5 \quad kN \uparrow$

Ebből számíthatók a k-k keresztmetszet terhelései:

$T = 62{,}5 \quad kN$

$N = -125 \quad kN$

$M_z = M_{hajl} = 125 \cdot 4 = 500 \quad kNm \quad (balról)$

$$I_z = \frac{400^3 \cdot 180}{12} - \frac{320^3 \cdot 160}{12} \cong 523 \cdot 10^6 \quad mm^4$$

$A = 320 \cdot 20 + 2 \cdot 40 \cdot 180 = 20800 \quad mm^2$

$M_{st(fél)z} = 40 \cdot 180 \cdot 180 + 160 \cdot 20 \cdot 80 = 1{,}55 \cdot 10^6 \quad mm^3$

$M_{st(öv)z} = 40 \cdot 180 \cdot 180 = 1{,}29 \cdot 10^6 \quad mm^3$

Ezekkel: $\sigma'_x = \dfrac{N}{A}$; $\sigma''_x = \dfrac{M_{hajl}}{I_z} \cdot y$; $\tau_{xy} = \dfrac{T \cdot M_{stat}}{I_z \cdot v_z}$

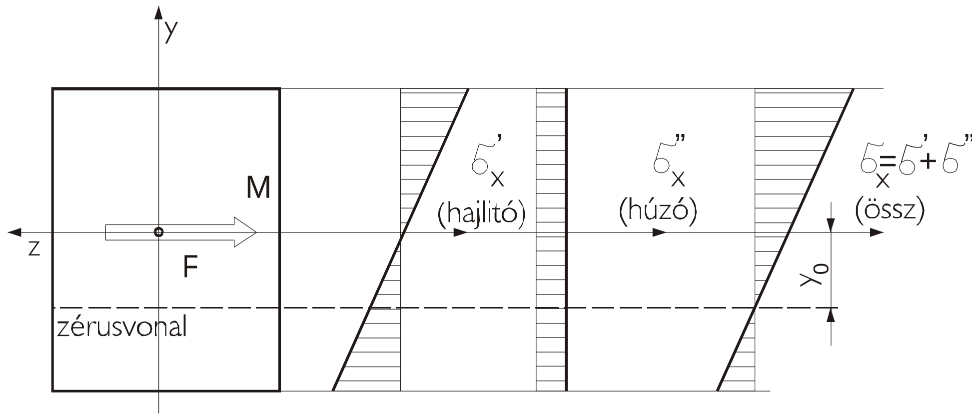
$\sigma_{MAX} = -197 \quad MPa \quad \langle \quad \sigma_{MEG}$
$\tau_{MAX} = 9{,}1 \quad MPa \quad \langle \quad \tau_{MEG}$

de az öv-gerinc találkozásánál „σ” és „τ” is fellép, ezért itt is számítandó a σ_{RED} !

$\sigma_{RED_{ö-g}} = \sqrt{(-6-153)^2 + 4 \cdot 7{,}58^2} = 159{,}7 \quad MPa \quad \langle \quad \sigma_{MEG}$
Tehát megfelel a tartó!

13.0 EGYIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

13.1.



13.1

A keresztmetszetben csak normálfeszültségek ébrednek, a húzás és hajlítás hatására:

$$\pm\sigma'_{x\,max}=\frac{M}{I_z}\cdot y_{max}=\frac{2\cdot 10^6(Nmm)}{\frac{40\cdot 60^3}{12}(mm^4)}\cdot 30(mm)=83{,}3\quad MPa$$

$$\sigma''_x=\frac{F}{A}=\frac{120\cdot 10^3}{40\cdot 60}=50\quad MPa$$

$$+\sigma_{x\,max}=133{,}3\quad MPa;\qquad -\sigma_{x\,max}=33{,}3\quad MPa$$

$$\text{ahol}:\quad \sigma''_x=\left|-\sigma'_x\right|\rightarrow\quad y_0=\sigma''_x\cdot\frac{I_z}{M}\qquad y_0=18\quad mm$$

13.2.

A tartóban ébredő normálerő a 45^0-os felfüggesztés miatt; N=1,5 kN végig.
A legnagyobb hajlító nyomaték a két terhelőerő közti szakaszon M_{max} =1,5 kNm
A szabványos szelvényű idomacél jellemzői táblázatból; $I=171.10^{-8}$ m^4 és
A=1060 mm^2

$$\sigma'_{max(hajl.)}=\frac{M_{max}}{I_t}\cdot 50=43{,}86\quad MPa$$

$$\sigma''_{húzó}=\frac{N}{A}=1{,}4\quad MPa$$

$q_{max}=\sigma' + \sigma''$=45,3 MPa, tehát megfelel a tartó !

A zérusvonal helye az előző példához hasonlóan számolva:
y_0 =1,6 mm

13.3.

F erő nemcsak húzó igénybevételt jelent, hanem hajlítja is a rudat, y tengely körül.

$$M_y = 15 \cdot 0{,}015 \quad \text{kNm}$$

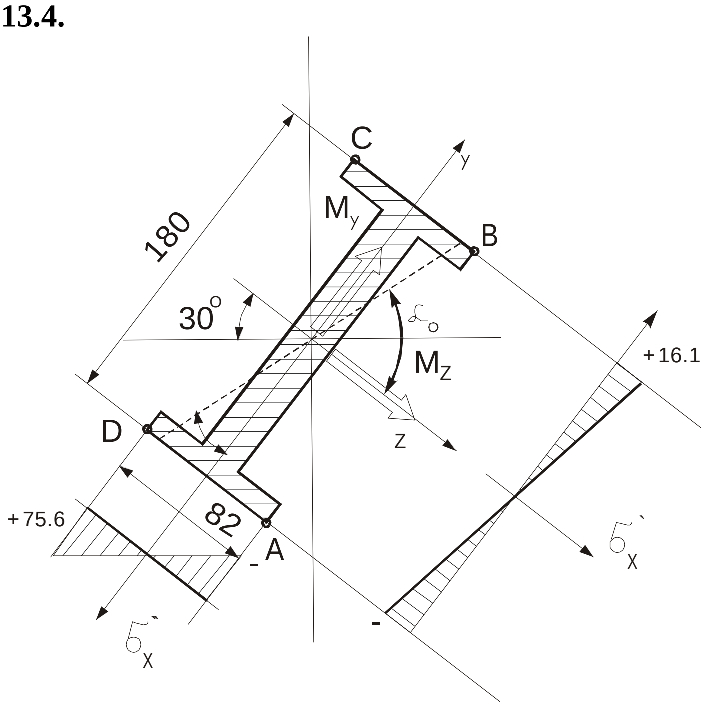
$$\sigma^{!}_{z(\text{húzó})} = \frac{F}{A} = \frac{15 \cdot 10^3 (\text{N})}{30 \cdot 18 \cdot (\text{mm}^2)} = 27{,}8 \quad \text{MPa},$$

$$\sigma^{''}_{z(\text{hajl.})} = \pm \frac{M_y}{I_y} y_{max} = -\frac{0{,}15 \cdot 10^6}{\frac{18 \cdot 30^3}{12}} \cdot \frac{30}{2} = \pm 55{,}6 \quad \text{MPa}$$

így a függőleges rúd baloldalán a húzott szálakban:

$$+\sigma_z = \sigma^{'}_z - \sigma^{''}_z \rightarrow \quad -\sigma_{z\,max} = 27{,}8 \quad \text{MPa}$$

13.4.



13.4

Az M nyomatékvektor felbontható komponensekre:

$$M_z = 2{,}6 \quad \text{kNm}$$

$$M_y = 1{,}5 \quad \text{kNm}$$

$$\pm \sigma^{'}_{x\,max} ,= \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$

$$\pm \sigma^{''}_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max}$$

táblázatból: I_z=1450.10^{-8} m^4
I_y=81,3.10^{-8} m^4

Semleges tengely helye; ahol az eredő feszültség nulla.

$$s^{'}_x = \left| -s^{''}_x \right| \quad \text{alapján} \quad \frac{y_0}{z_0} = \text{tg}\,\alpha_0 = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z}; \quad \alpha_o = 84{,}4^o\text{-ra „z”-től felfelé}$$

$$s_A = -s^{'}_x - s^{''}_{x'} \quad s_B = +s^{'}_x - s^{''}_x \quad s_C = s^{'}_x + s^{''}_x \quad s_D = -s^{'}_x + s^{''}_x$$

$$s_A = -91{,}9 \quad MPa, \quad s_B = -59{,}7 \quad MPa, \quad s_C = 91{,}9 \quad MPa, \quad s_D = 59{,}7 \quad MPa$$

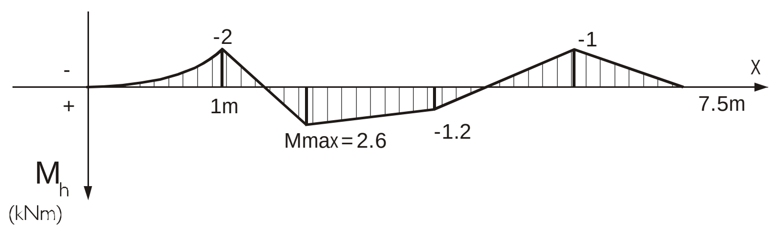
13.5.

Reakcióerők ; a baloldali alátámasztásra (A) felírt egyensúly alapján:

$$F_B = \frac{-4\cdot 0{,}5 + 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6{,}5}{5} = 3{,}7 \quad kN \uparrow$$

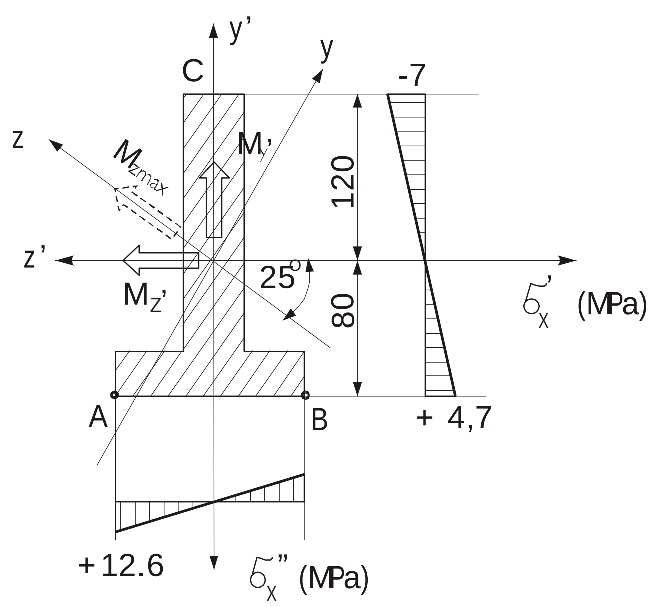
$$F_A = 4 + 3 + 2 + 1 - 3{,}7 = 6{,}3 \quad kN \uparrow$$

így a hajlítónyomatéki függvény:



$M_{z\,max}$=2,6 kNm (F_1 támadáspontjánál), x = 3 m-nél

A veszélyes keresztmetszetet elforgatva ábrázolva:



13.5

$M_{y'} = 1{,}1 \quad kNm$

$M_{z'} = 2{,}36 \quad kNm$

az M_{zmax} komponensei.

Statikai jellemzők:

$$y_s' = \frac{120 \cdot 30 \cdot 15 + 40 \cdot 170 \cdot 115}{120 \cdot 30 + 40 \cdot 170}$$

$$y_s' = 80{,}4 \approx 80 \quad \text{mm}$$

$$I_z' = \left[\frac{30^3 \cdot 120}{12} + 65^2 \cdot 30 \cdot 120\right] + \left[\frac{170^3 \cdot 40}{12} + 35^2 \cdot 40 \cdot 170\right] = 4019 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_y' = \frac{120^3 \cdot 30}{12} + \frac{40^3 \cdot 170}{12} \cong 522{,}6 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$s_x' = \frac{M_z'}{I_z'} \cdot y' \qquad - s_{x\max}' = \frac{2{,}35 \cdot 10^6}{4018 \cdot 10^4} \cdot 120 = 7 \quad MPa$$

$$s_x'' = \frac{M_y'}{I_y'} \cdot z' \qquad \pm s_{x\max}'' = \frac{1{,}1 \cdot 10^6}{522 \cdot 10^4} \cdot 60 = 12{,}6 \quad MPa$$

$$\left(+ s_{\max}' = \frac{2{,}35 \cdot 10^6}{4018 \cdot 10^4} \cdot 80 = 4{,}7 \quad MPa \right)$$

Tehát: $\sigma_A = 17{,}3 \quad \text{MPa}, \qquad \sigma_B = 7{,}9 \quad \text{MPa}, \qquad \sigma_C = -7 \quad \text{MPa}$

13.6.

A megoszló terhelés hatására az AB szakaszon nyomó és hajlító igénybevétel lép fel;

$N_x = F_{nyomó} = 16.0{,}5 = 8$ kN, és $M_z = M_{hajl} = 16.0{,}5 = 2$ kNm végig a függőleges rúdban

Nyomásból: $\sigma_x' = \dfrac{N_x}{A} = \dfrac{-8 \cdot 10^3 (\text{N})}{1420 (\text{mm}^2)} = -5{,}6 \quad \text{MPa}$

Hajlításból: $s_{x\max}'' = \dfrac{M_z}{K_z} \cdot = \dfrac{2 \cdot 10^6 (Nmm)}{54{,}7 \cdot 10^3 (mm^3)} = \pm 36{,}6 \quad MPa$ (A, és K_z értékei táblázatból!)

$\sigma_{x\,max}$= |-42,2 MPa| , ami kisebb mint σ_M=80 MPa, tehát a tartó megfelel !

13.7.

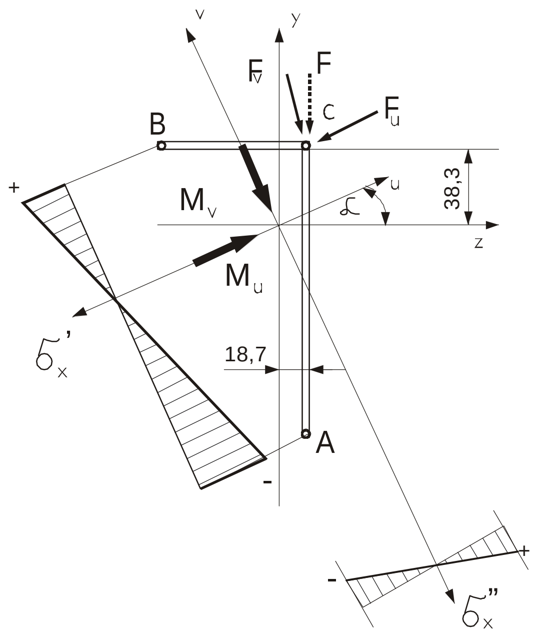
A keresztmetszet nyomatéki főtengelyei u; v; így kétirányú hajlításra bontható a terhelés. (Mivel feltételezzük, hogy ezek átmennek a nyírási középponton, így csavaró-hatás nincs !)

$$M_u = F_v \cdot l \quad , \quad M_v = F_u \cdot l$$

Maximális nyomatékok a befalazásnál lépnek fel.

Táblázatból:

$$\text{tg}\,\alpha = 0{,}441 \rightarrow \alpha = 23{,}8^0$$



$$M_u = 5 \cdot \cos 23{,}8 \cdot 1 = 4{,}57 \quad kNm$$

$$M_v = 5 \cdot \sin 23{,}8 \cdot 1 = 2{,}02 \quad kNm$$

$$\sigma'_{x,} = \frac{M_u}{I_u} \cdot v \quad \text{és} \quad \sigma''_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u$$

$$I_u = 261 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_v = 45{,}8 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

A vizsgált pontok u, v koordinátái a geometriából – α segítségével – felírhatók, pl.:

$$u_A = y_A \cdot \sin a - z_A \cdot \cos a = 15{,}9 \quad mm$$

$$v_A = y_A \cdot \cos\alpha + z_A \cdot \sin\alpha = 82{,}3 \quad mm$$

13.7

„A" pont feszültségei:

$$s'_{xA} = \frac{4{,}51 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{261 \cdot 10^4} \cdot (-82{,}3) = -142{,}2 \quad MPa$$

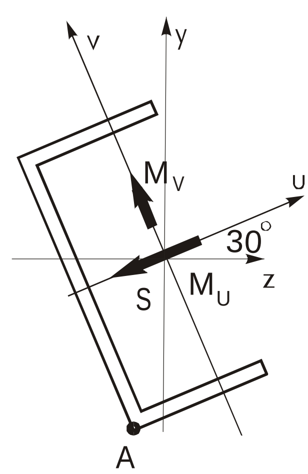
$$s''_{xA} = \frac{2{,}01 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{45{,}8 \cdot 10^4} \cdot (-15{,}8) = -69{,}3 \quad MPa$$

$$\sigma_{xA(RED)} = -\sigma'_{xA} - \sigma''_{xA} = -211{,}5 \quad MPa$$

Ugyanígy: $s_{xB} = -74{,}8 \quad MPa$, $\quad s_{xC} = 191{,}3 \quad MPa$

$$([u_B; v_B] = [40{,}6; 59{,}8] \qquad [u_C; v_C] = [32{,}6; 27{,}9])$$

13.8.



13.8

13.8.

A maximális hajlítónyomatékok a tartó közepén x=2,6 m-nél számolhatók, a komponensekre bontott reakcióerő (F=6,7 kN) nyomatékaiból:

$$M_u = F_v \cdot \frac{l}{2} - Q_v \cdot \frac{l}{4} \cong 7{,}6 \quad kNm$$

$$M_v = F_u \cdot \frac{l}{2} - Q_u \cdot \frac{l}{4} \cong 4{,}4 \quad kNm$$

$$I_u = 3600 \cdot 10^4 \quad mm^4, \quad I_v = 248 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

főinerciák értékei (táblázatból)

$$s'_x = \frac{M_u}{I_u} \cdot v \quad és \quad s''_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u$$

„<u>A</u>” pontban:

$$s_{xA} = s'_{xA} + s''_{xA} = \frac{7{,}5 \cdot 10^6}{3600 \cdot 10^4} \cdot 120 + \frac{4{,}4 \cdot 10^6}{248 \cdot 10^4} \cdot 22{,}3 = 64{,}9 \quad MPa$$

$$s_{xB} = -s'_{xB} - s''_{xB} = -\frac{7{,}5 \cdot 10^6}{3600 \cdot 10^4} \cdot 120 - \frac{4{,}4 \cdot 10^6}{248 \cdot 10^4} \cdot 62{,}7 = -136{,}6 \quad MPa$$

13.9.

A hajlításból adódó maximális húzófeszültséggel egyező értékű nyomófeszültséget kell ébreszteni a keresztmetszeten, így a baloldali szélső szálakban nulla, a többi helyen csak negatív feszültség ébred:

$$s'_{x(nyomó)} = \frac{N}{A} \quad és \quad s''_{x\max(hajl.)} = \frac{M}{I_Z} \cdot y_{\max}$$

$$s'_X = s''_X - bőő \qquad N = A \cdot \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max} = 80 \cdot 40 \cdot \frac{1 \cdot 10^3}{\frac{80^3 \cdot 40}{12}} \cdot \frac{80}{2} = 75 \quad kN$$

$$\left(-s_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{K_t} = \frac{75 \cdot 10^3}{80 \cdot 40} + \frac{1 \cdot 10^6}{\frac{80^2 \cdot 40}{6}} = 46{,}9 \quad MPa \right)$$

13.10.

„<u>K</u>” keresztmetszet terhelései (jobbról számítva):

N=F=125 kN

$$\mathrm{M_z = F_B \cdot 4 + F \cdot 2 = 500 \quad kNm}$$

$$\left(\mathrm{F_B = \frac{125 \cdot 2}{4} = 62{,}5 \quad kNm} \downarrow \right)$$

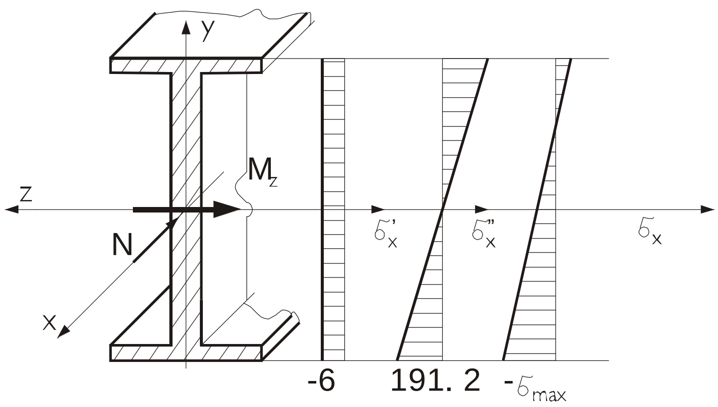
$$s_x' = \frac{-N}{A} \qquad s_x' = -6{,}5 \quad MPa\ \text{állandó}$$

$$s_x'' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \qquad s_{x\max}'' = 191{,}2 \quad MPa$$

Ahol a keresztmetszet jellemzői:

$$A = 2 \cdot 40 \cdot 180 + 20 \cdot 320 = 20800 \ \text{mm}^2$$

$$I_y = \frac{180 \cdot 400^3}{12} - \frac{160 \cdot 320^3}{12} = 52309 \cdot 10^4 \quad \text{mm}^4$$



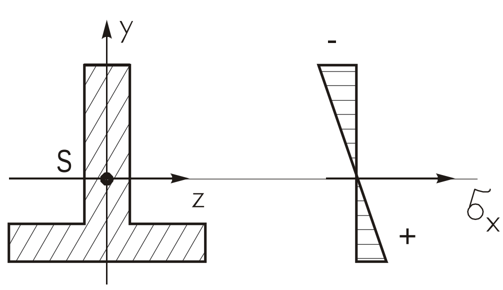
13.10

13.11.

A legnagyobb hajlítónyomatékból (középen) $M_z = F_A \cdot \frac{1}{2} - p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 1 \quad \text{kNm}$,

ennek hatására a „⊥” szelvényű tartó alsó szálaiban húzó-, a felső szálakban nyomófeszültség ébred:

$$+\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_s = 22{,}05 \quad \text{MPa} \qquad \text{(hajlító)}$$



13.11

$$\left(I_z = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20^2 \cdot 60 \cdot 20 = 136 \cdot 10^4 \quad mm^4 \right)$$

$$\left(A = 2 \cdot 20 \cdot 60 = 2400 \quad mm^2 \right)$$

Ha csak 20 MPa húzófeszültség lehet:

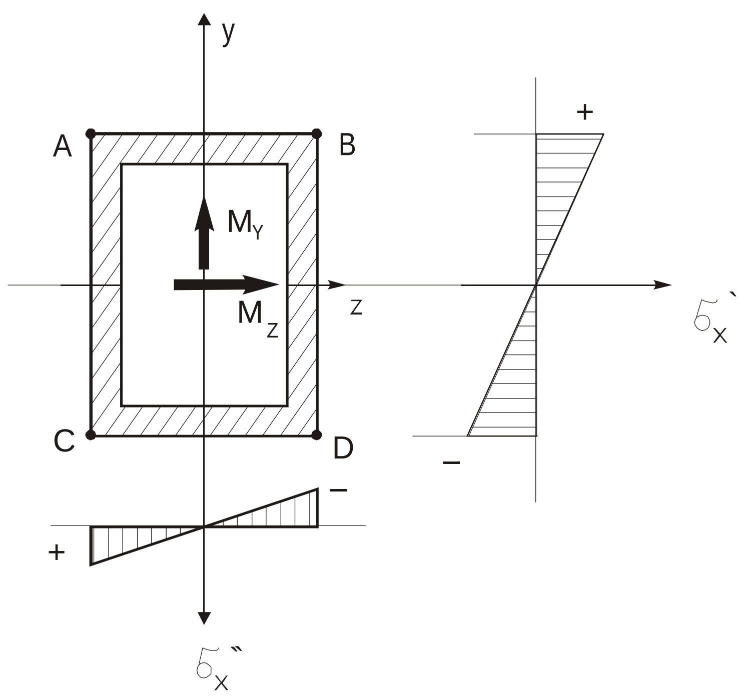
$$N = \left(+ s_{\max_{hajl.}} - s_{nyomó} \right) \cdot A = 2{,}05 \cdot 2400 = 4920 \quad N$$

13.12.

Az „M” nyomatékot M_z és M_y komponensekre bontjuk:

$$M_z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot M = 3{,}247 \quad kNm, \quad M_y = \frac{1}{2} M = 1{,}875 \quad kNm$$

A vízszintes tengely körüli hajlításból a „z” feletti szálakban húzó, alatta nyomófeszültség ébred; $\sigma'_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$. A függőleges tengely körüli hajlítás „y”-tól balra húzó, jobbra nyomófeszültséget okoz;



$$s''_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_A = \sigma'_{x\,max} + \sigma''_{x\,max}$$
$$\sigma_B = \sigma'_{x\,max} - \sigma''_{x\,max}$$
$$\sigma_C = -\sigma'_{x\,max} + \sigma''_{x\,max}$$
$$\sigma_D = -\sigma'_{x\,max} - \sigma''_{x\,max}$$

$$s'_{x\max} = \pm 92{,}8 \quad MPa$$
$$s''_{x\max} = \pm 59{,}2 \quad MPa$$

13.12

$$I_z = \frac{60 \cdot 80^3}{12} - \frac{44 \cdot 68^3}{12} \cong 140 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$$I_y = \frac{80 \cdot 60^3}{12} - \frac{68 \cdot 44^3}{12} \cong 95 \cdot 10^4 \quad mm^4$$

$s_A = 152 \quad MPa$, $s_B = 33{,}6 \quad MPa$, $s_C = -33{,}6 \quad MPa$,
$s_D = -152 \quad MPa$

15.0 KIHAJLÁS

15.1.

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \qquad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$ (Másodrendű nyomatékok és az L szelvény keresztmetszete táblázatból!)

$$I_1 = 4 \cdot 4{,}48 \cdot 10^4 + 4 \cdot 28{,}8^2 \cdot 308 = 12{,}01 \cdot 10^5 \quad mm^4 \qquad l_1 = 48{,}1$$

$$I_2 = 4 \cdot 4{,}48 \cdot 10^4 + 4 \cdot 11{,}2^2 \cdot 308 = 3{,}34 \cdot 10^5 \quad mm^4 \qquad l_2 = 118$$

$$I_3 = \frac{39{,}6^4}{64} = 1{,}208 \cdot 10^5 \quad mm^4 \quad \left(d = \sqrt{\frac{4A}{p}} \right) \qquad l_3 = 151$$

$$I_4 = \frac{35{,}1^4}{12} = 1{,}26 \cdot 10^5 \quad mm^4 \quad \left(a = \sqrt{A} \right) \qquad l_4 = 148$$

15.2.

$$l = \frac{0{,}7 \cdot l}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$$

$$l = \frac{0{,}7 \cdot 2800}{\sqrt{\frac{81{,}3 \cdot 10^4}{2790}}} \cong 115 \ \rangle \ 100$$ tehát Euler szerint számítható a F_{KR}

(I,A táblázatból).

$$F_{KR} = \frac{p^2}{l_0^2} \cdot I_{\min} \cdot E$$

$$F_{KR} = 438{,}2 \quad kN; \quad n = \frac{F_{KR}}{F} = 3{,}13 \ \rangle \ 3,$$ megfelel!

15.3.

$$l = \frac{2l}{\sqrt{\frac{D^4 - d^4}{16\left(D^2 - d^2\right)}}} = 97{,}6 \approx 100$$

Euler szerint számítva: $F_{kR} = \frac{p^2}{(2 \cdot 4)^2} \cdot \frac{\left(0{,}26^4 - 0{,}2^4\right)p}{64} \cdot 100 \cdot 10^6$

F_{KR} = 2245 kN; így n=250; a rúd megfelel!

15.4.

$$I_{\min} = I_z = 2 \cdot 3600 \cdot 10^4 + 2\left(\frac{345 \cdot 12^3}{12} + 126^2 \cdot 345 \cdot 12 \right) = 203{,}6 \cdot 10^6 \quad mm^4$$

$$A = 16740 \quad mm^2 \qquad l = \frac{2l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = 188 \rightarrow \quad w = 5{,}98 \quad (\textit{táblázatból})$$

így ω. F terheléssel, mint nyomott rudat ellenőrizzük:

$$s = \frac{w \cdot F}{A} = 250 \ MPa \ \rangle \ s_{MEG},$$ nem felel meg !

15.5.

Reakcióerők: $F_B = \frac{60 \cdot 6}{2} = 180 \quad kN \uparrow, \qquad F_A = 120 \quad kN \downarrow$

Legnagyobb húzóerő: (+)S = 120 kN (a baloldali függőleges rudakban)
Legnagyobb nyomóerő: (-) S = 180 kN (a jobboldali függőleges rudak)
Kihajlás nyomás esetén léphet fel, ha $\lambda > 60$.

A rácsrudak esetén $l = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$ alapján: $\lambda = \frac{2000}{\sqrt{\frac{108^4 - 100^4}{16(108^2 - 100^2)}}} = 54{,}4 \quad \langle \quad 60$

Az ellenőrzés így a legnagyobb normálerővel, nyomásra:

Nyomásra: $\sigma_{MAX} = \frac{-S}{A} \cong 138\ \mathrm{MPa} \quad \langle \quad \sigma_{MEG}$, megfelel !

15.6.

A vizszintes rúdban ébredő húzóerő F_v = F.1,5 = 6 kN, a ferde rúdban a nyomóerő $F_f = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}2 \quad kN \qquad F_f \quad \rangle \quad F_v$, így nyomásra méretezünk a kihajlás figyelembevételével!

$$l = \frac{l_{ferde}}{\sqrt{\frac{D^4 - d^4}{16(D^2 - d^2)}}} = 137 \qquad (l_{ferde} = 1{,}8 \quad m)$$

$$w = 3{,}14 \qquad s_{\max} = \frac{w \cdot F_f}{A} = 64{,}9 \quad MPa \quad \langle \quad s_M \quad \text{megfelel!}$$

15.7.

Veszélyes lehet nyomásra:

$S_4 = -400 \quad kN \qquad l_4 = 2 \quad m; \qquad S_5 = -260 \quad kN \qquad l_5 = 3 \quad m$

Húzásra: $S_3 = S_7 = 312 \quad kN$

$I_{\min} \cong 380 \cdot 10^4 \quad mm^4, \qquad A = 2700 \quad mm^2 \qquad I_{\min} = 2(I_y + (b-e)^2 \cdot A) \quad ;$

(ahol a szelvényjellemzők táblázatból!)

$s_4 = \frac{S_4}{A} = 148\ MPa \quad \langle \quad s_{meg}; \qquad s_3 = \frac{S_3}{A} = 115{,}6\ MPa \quad \rangle \quad s_{meg}$

$l_4 = \frac{l_4}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = 53{,}3, \qquad l_5 = \frac{l_5}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = 80,$ tehát az 5-ös veszélyes kihajlásra is:

$\omega = 1{,}71 \qquad \sigma_{5\,KR} \cong \frac{1{,}71 \cdot 260}{2700} = 165 \quad \mathrm{MPa} \quad \rangle \quad \sigma_M$ Tehát ez nem felel meg !

15.8.

$I_{\min} = 2 \cdot \left[I_y + (b-e)^2 \cdot A \right]$ (szelvény-jellemzők táblázatból!)

$I_{\min} \cong 604 \cdot 10^4 \quad mm^4$

ha $\lambda > 100$, Euler szerint $F_{KR} = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot I_{\min} \cdot E$

$F_{KR} = 542{,}8 \quad kN; \quad F_{tényl} \le \frac{F_{KR}}{n} = \frac{p \cdot 2a}{2}; \quad p = 37{,}6 \quad kN/m.$

5.9.

Mivel a két szélső rúd összehúzódik, összenyomja a középsőt:

$$\Delta l = a \cdot l_0 \Delta_t = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E} - b\H{o}\H{o} \qquad F = a \cdot \Delta t \cdot A \cdot E \qquad \left(A = \frac{\left(50^2 - 45^2\right)p}{4} \right)$$

$$F = 36020\ N \approx 36\ kN; \quad 2F = 72\ kN; \qquad l = \frac{l_0}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{2500}{\frac{60^4 - 55^4}{16\left(60^2 - 55^2\right)}} \approx 123$$

Tehát Euler szerint

$$F_{KR} = \frac{p^2}{l_0^2} \cdot I \cdot E = 61{,}9 \quad kN$$

Mivel $F_{KR} < F_{nyomó}$, nem felel meg kihajlásra!

15.10.

Feltételezve, hogy $\lambda \ \rangle \ 100$; $F_{kR} = \frac{\pi^2}{l_{02}} \cdot I \cdot E = n \cdot F$ alapján

$$I_y = \frac{n \cdot F(0{,}5l)^2}{p^2 \cdot E} \quad és \quad I_z = \frac{n \cdot F \cdot (0{,}7 \cdot l)^2}{p^2 \cdot E}$$

$$I_y = 0{,}68 \cdot 10^6 \quad mm^4 \cong 68 \quad cm^{4;} \quad I_z \cong 134 \quad cm^4$$

Mivel:

$$I_y = \frac{a^3 \cdot b}{12} \quad és \quad I_z = \frac{b^3 \cdot a}{12} \rightarrow a = 49{,}1 \quad mm, \quad b = 69 \quad mm$$

Tényleges karcsúság :

$$l_z = \frac{0{,}5 \cdot l}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}}; \qquad l_y = \frac{0{,}7 \cdot l}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} \quad ; \quad l_z = l_y \cong 212\,.$$

16.0 HAJLÍTOTT TARTÓK ALAKVÁLTOZÁSA

16.1.

Járulékképletekkel:

$$y_C = \frac{F_1 \cdot l_{AB}^3}{3IE} + \frac{F_2 \cdot l_{AO}^3}{3IE} + \varphi_{B(F_1)} \cdot l_{BC}$$

$$\varphi_C = \frac{F_1 \cdot l_{AB}^2}{2IE} + \frac{F_2 \cdot l_{AC}^2}{2IE}$$

$$\varphi_{B(F_1)}$$

$$y_C = 7{,}31 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \downarrow \qquad \varphi_C = 3{,}38 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}$$

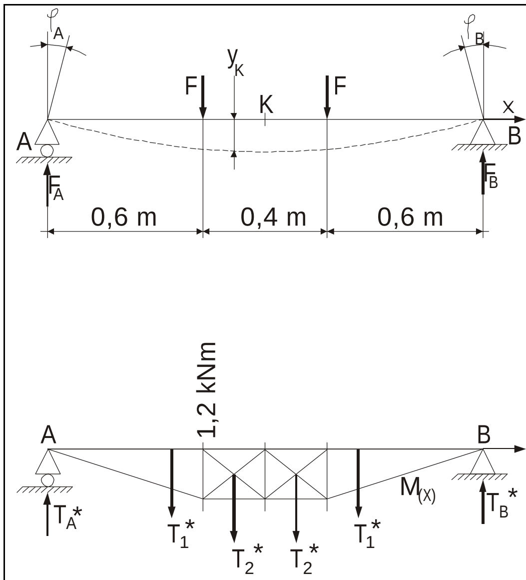
16.2.

$$y = \frac{p \cdot l^4}{8\ IE} + \frac{F \cdot l^3}{3\ IE} = 9{,}45 \quad \text{mm} \downarrow$$

$$\varphi = \frac{p \cdot l^3}{6\ IE} + \frac{F \cdot l^2}{2\ IE} = 2{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

16.3.

Mohr-módszerrel;



16.3

a nyomaték-függvény alatti területek (T^*) és azok statikai nyomatékának ($M^{*)}$ segítségével:

$$\varphi_A = \frac{T_A^*}{IE}; \quad y_K = \frac{M_K^*}{IE}$$

$$T_1^* = M \cdot 0{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}36 \quad kNm^2$$

$$T_2^* = M \cdot 0{,}2 = 0{,}24 \quad kNm^2$$

$$T_A^* = T_B^* = \frac{2T_1^* + 2T_2^*}{2} = 0{,}6 \quad kNm^2$$

$$j_a = j_B = 80 \cdot 10^{-4}\, rad$$

$$M_K^* = T_A^* \cdot 0{,}8 - T_1^* \cdot 0{,}4 - T_2^{*.} \cdot 0{,}1 = 0{,}312\ kNm^3$$

$$y_k = 4{,}16 \quad mm \downarrow$$

(A „T*" – k a területek súlypontjában hatnak)!

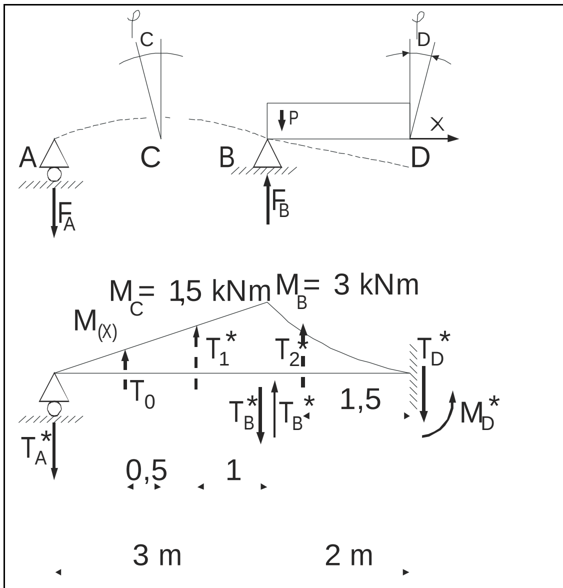
16.4.

Járulékképletekkel:

$$y_K = \frac{F \cdot l^3}{48IE} + \frac{5p \cdot l^4}{384 \cdot IE} = 24 \quad mm \downarrow$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{F \cdot l^2}{16\ IE} + \frac{p \cdot l^3}{24\ IE} = 1{,}91 \cdot 10^{-2}\,rad$$

16.5.



Reakciók:

$$F_A = 3 - 4 = 1 \quad kN \downarrow$$

$$F_B = \frac{1{,}5 \cdot 2 \cdot 4}{3} = 4 \quad kN \uparrow$$

$$T_1^* = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5 \quad kNm^2$$

$$T_2^* = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2 \quad kNm^2$$

A-B egyensúlyából:

$$\sum M_B^* = 0; \qquad T_A^* = 1{,}5 \quad kNm^2$$

$$\sum T^* = 0; \qquad T_B^* = 3 \quad kNm^2$$

B-D egyensúlyából:

$$T_B^* + T_2^* = 5\ kNm^2$$

$$M_D^* = T_2^* \cdot 1{,}5 + T_B^* \cdot 2 = 9\ kNm^3$$

„C" keresztmetszet alakváltozásához, csak az A-C közti M(x).függvényt kell figyelembe venni, ehhez

$$T_0^* = 1{,}125 \quad kNm^2 \qquad T_C^* = -T_A^* + T_0^* = -0{,}375 \quad kNm^2$$

$$M_C^* = -T_A^* \cdot 1{,}5 + T_0^* \cdot 0{,}5 = -1{,}68 \quad kNm^3$$

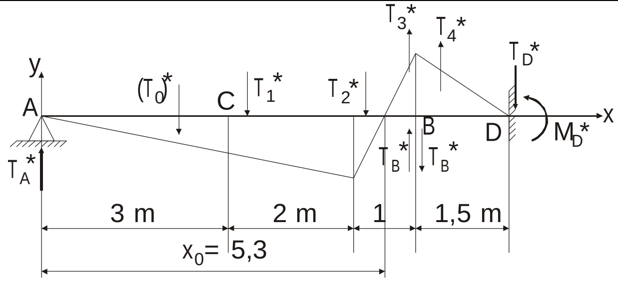
$$\varphi_D = \frac{T_D^*}{IE} = 5 \cdot 10^{-4}\,rad \quad \text{iránya} \qquad (T_D^* \text{ előjeléből } \uparrow\downarrow)$$

$$y_D = \frac{M_D^*}{IE} = 0{,}9 \quad mm \quad \text{iránya} :\downarrow \quad (M_D^* \text{ előjeléből } \cup)$$

$$\varphi_C = \frac{T_C^*}{IE} = -0{,}375 \cdot 10^{-4}\,rad$$

$y_C = \dfrac{M_C^*}{IE} = -0{,}169 \quad mm \uparrow$ A deformált alak az ábrán jelölve.

16.6.



16.6

Reakcióerők:

$F_A = 0{,}33\ kN \uparrow$

$F_B = 6{,}67\ kN \uparrow$

Jellemző nyomatékok:

$x = 3\ m: \quad M_{(C)} = 0{,}9\ kNm$

$x = 5 \quad : \quad M_{(F_1)} = 1{,}5\ kNm$

$x = 6 \quad : \quad M_B = 3 \quad kNm$

$x_0 = 5{,}35 : M = 0 = F_A \cdot x_0 - F_1(x_0 - 5)$

M(x) alatti területek:

$T_1^* = 3{,}75\ kNm^2$

$T_2^* = 0{,}225\ kNm^2$

$T_3^* = -1{,}05\ kNm^2$

$T_4^* = -2{,}25\ kNm^2$

A-B szakasz egyensúlyából: $\sum M_A^* = 0$ alapján

$$T_B^* = \frac{\sum_1^3 T_i \cdot x_{si}}{6} = 1{,}26 \quad kNm^2 \uparrow; \qquad T_A^* = \sum_1^3 \cdot T_i^* - T_B^* = 1{,}67 \quad kNm^2$$

B-D szakaszon (T_B^* előjelet vált !):

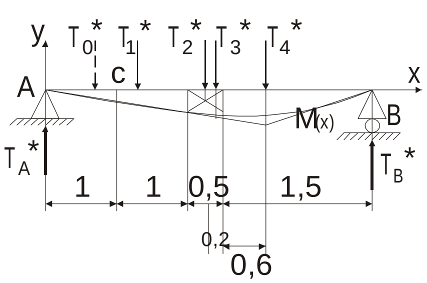
$$T_D^* = T_4^* - T_B^* = 0{,}99 \quad kNm^2 \downarrow; \qquad M_D^* = -1{,}42 \cdot 1{,}5 + 2{,}25 \cdot 1 = 0{,}36 \quad kNm^3$$

$$j_D = \frac{T_D^*}{IE} = 0{,}99 \cdot 10^{-4} rad; \qquad y_D = \frac{M_D^*}{IE} = 0{,}036 \quad mm \downarrow$$

$$j_c = \frac{T_C^*}{IE} = \frac{T_A^* - T_0^*}{IE} = 0{,}32 \cdot 10^{-4} rad; \quad \left(T_0^* = 1{,}35 \quad kNm^2\right)$$

$$y_C = \frac{M_C^*}{IE} = 0{,}366 \quad mm \downarrow; \qquad (M_C^* = 1{,}65 \cdot 3 - 1{,}35 \cdot 1 = 3{,}66 \quad kNm^3)$$

16.7.



16.7

Reakciók: $F_A = 2$ kN

$F_B = 6$ kN

Jellemző nyomatékok:

x=1 m : $M_C = 2$ kNm

x=2 m : $M_D = 4$kNm

x_0=2,5 m : $M_{max} = 4{,}5$ kNm

(T=0$\rightarrow$ F_A =p.x alapján)

$T_1^* = 4 \quad kNm^2; \qquad T_2^* = 2 \quad kNm^2; \qquad T_3^* = 0{,}17 \quad kNm^2; \quad T_4^* = 4{,}5 \quad kNm^2$

$(T_3^*, \quad T_4^*$ parabola alatti területek; $\frac{2}{3} \cdot x \cdot M)$

$$T_B^* = \frac{\sum_1^4 M_i^* \cdot x_{si}}{4} = 6{,}04 \quad kNm^2 \uparrow; \qquad T_A^* = \sum_1^4 T_i^* - T_B^* = 4{,}63 \quad kNm^2 \uparrow$$

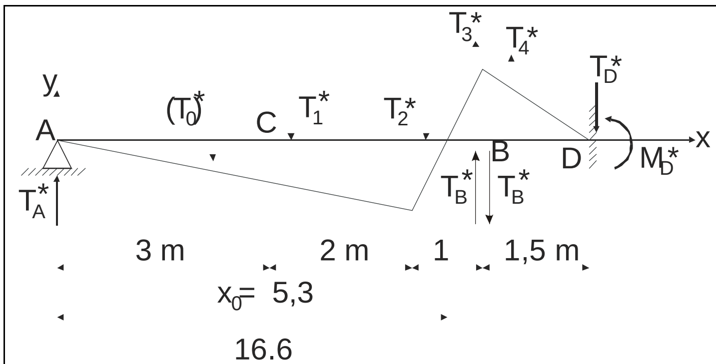
$$T_C^* = T_A^* - T_0^* = 3{,}63 \quad kNm^2; \qquad T_D^* = T_A^* - T_1^* = 0{,}63 \quad kNm^2$$

$$M_C^* = 4{,}5 \cdot 1 - 1 \cdot 0{,}3 = 4{,}2 \quad Nm^3; \qquad M_D^* = 4{,}5 \cdot 2 - 4 \cdot 0{,}6 = 6{,}3 \quad kNm^3$$

$$j_C = \frac{T_c^*}{IE} = 3{,}63 \cdot 10^{-4} rad; \qquad y_C = \frac{M_c^*}{IE} = 0{,}43 \quad mm \downarrow$$

$$j_D = \frac{T_D^*}{IE} = 0{,}63 \cdot 10^{-4} rad; \qquad y_D = \frac{M_D^*}{IE} = 0{,}658 \quad mm \downarrow$$

16.8.



Reakciók: $F_A = 1{,}5$ kN↑
$F_B = 2{,}5$ kN↑
$T_1^* = 3 \quad kNm^2$
$T_2^* = 1{,}8 \quad kNm^2$
$T_3^* = -0{,}8 \quad kNm^2$
$T_4^* = -2 \quad kNm^2$

$A - B$ szakaszon $\sum M_A^* = 0$ alapján:

$$T_B^* = \frac{\sum_1^3 T_i^* \cdot x_{si}}{4} = 1{,}33 \quad kNm^2 \uparrow; \qquad T_A^* = \sum_1^3 T_i^* - T_B^* = 2{,}67 \quad kNm^2 \uparrow$$

A-D szakasz:

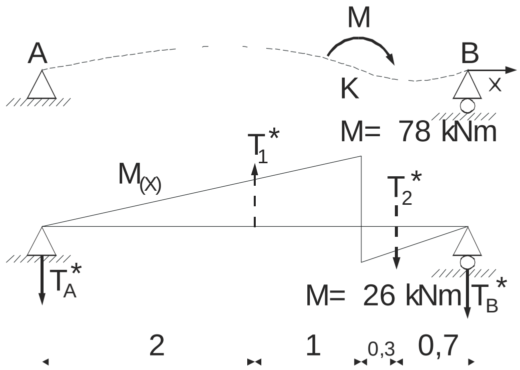
$$T_D^* = T_4^* - T_B^* = 0{,}67 \quad kNm^2 \downarrow; \qquad M_D^* = -1{,}33 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 = -0{,}33 \quad kNm^3$$

$$j_D = \frac{T_D^*}{IE} = 0{,}67 \cdot 10^{-4} rad; \qquad y_D = \frac{M_D^*}{IE} = 0{,}03 \quad mm \downarrow$$

$$j_C = \frac{T_A^* - T_1^*}{IE} = 0{,}33 \cdot 10^{-4} rad; \qquad y_C = \frac{M_c^*}{IE} = \frac{2{,}66 \cdot 2 - 3 \cdot 0{,}66}{IE} = 0{,}33 \; mm \downarrow$$

16.9.

Reakcióerők: $F_A = F_B = \dfrac{104}{4} = 26 \quad kN \downarrow\uparrow$



16.9.

/erőpár!/

$T_1^* = 117 \quad kNm^2$

$T_2^* = 13 \quad kNm^2$

$$\sum M_B^* = 0 \quad T_A^* = \frac{\sum_1^2 T_i^* \cdot x_{si}}{4} = 56{,}2 \quad kNm^2 \downarrow$$

$$T_B^* = -T_A^* + T_1^* - T_2^* = 47{,}8 \quad kNm^2 \downarrow$$

$$I_z = \frac{160^4}{12} - \frac{120^4 \cdot p}{64} = 4{,}4 \cdot 10^7 \quad mm^4$$

$$I \cdot E = 9{,}24 \cdot 10^3 \quad kNm^2$$

$$j_A = \frac{T_A^*}{I \cdot E} = -6 \cdot 10^{-3} rad \cap$$

$$j_K = \frac{-T_A^* + T_1^*}{IE} = 6{,}6 \cdot 10^{-3} rad \cap$$

$$M_K^* = -56{,}2 \cdot 3 + 117 \cdot 1 = -51{,}6 \quad kNm^3$$

$$y_K = \frac{M_K^*}{IE} = -5{,}6 \quad mm \uparrow$$

16.10.

Castiglianó tételének – az alakváltozás és a külső munka összefüggése – segítségével:

$W = \dfrac{1}{2IE} \cdot \int M(x)^2 dx$ - ből

$f = \dfrac{\partial W}{\partial F} = \dfrac{\partial L}{\partial M} \cdot \dfrac{\partial M(x)}{\partial F} = \dfrac{1}{IE} \cdot \int_0^l M(x) \dfrac{\partial M(x)}{\partial F_0} \cdot dx$ az elmozdulás ott, ahol F_0 működik.

$j = \dfrac{\partial W}{\partial M_0} = \dfrac{\partial L}{\partial M(x)} \cdot \dfrac{\partial M(x)}{\partial M_0} = \dfrac{1}{IE} \cdot \int_0^l M(x) \cdot \dfrac{\partial M(x)}{\partial M_0} \cdot dx$ a szögelfordulás ott, ahol M_0 működik.

Ha a vizsgált keresztmetszetben éppen nem hat „F” ill. „M”, ott feltételezzünk oda F_0=0 ill. M_0=0 értékűeket !

A törtvonalú tartón szakaszonként felírjuk a nyomatékfüggvényeket

- hogy képezhessük a parciális deriváltakat:

„f”-hez A-B szakaszon M(y)=3 F; $\frac{\partial M(y)}{\partial F} = 3$

B-C szakaszon M(x)=F.x; $\frac{\partial M(x)}{\partial F} = x$

$F_0 = F$

$$f_C = \frac{1}{IE}\left(\int_0^3 3F \cdot 3 \cdot dy + \int_0^3 Fx \cdot x \cdot dx\right) = \frac{1}{IE}\left([9Fy]_0^3 + \left[F\frac{x^3}{3}\right]_0^3\right)$$

$f_C = 18$ mm ↓

„φ”-hez: A-B szakaszon $M(y) = 3F + M_0$; $\frac{\partial M(y)}{\partial M_0} = 1$

(M₀ = 0 a B-C szakaszon $M(x) = Fx + M_0$; $\frac{\partial M(x)}{\partial M_0} = 1$

C keresztmetszetben)

$$j_C = \frac{1}{IE}\left[\int_0^3 (3F + M_0) \cdot dy + \int_0^3 (Fx + M_0) \cdot dx\right] = \frac{1}{IE}\left[[3Fy + M_0 y]_0^3 + \left[\frac{F \cdot x^2}{2} + M_0 \cdot x\right]_0^3\right]$$

$$j_C = 6{,}75 \cdot 10^{-3} rad$$

16.11.

A-B helyen x irányú F_0=0-t kell működtetnünk az elmozduláshoz:
Az egyes szakaszok „M”-függvényei:

$$B-D: \quad M_1 = F_0 y; \qquad ; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial F_0} = y.$$

$$D-C: \quad M_2 = 3F_0 + \frac{p \cdot x^2}{2} \qquad ; \qquad \frac{\partial M_2}{\partial F_0} = 3.$$

$$C-A: \quad M_3 = F_0(3-y) + p\frac{6^2}{2} \quad ; \quad \frac{\partial M_3}{\partial F_0} = 3 - y.$$

$$f = \frac{1}{IE}\left(\int_0^3 F_0 y^2 dy + \int_0^6 \left(9F_0 + \frac{3px^2}{2}\right)dx + \int_0^3 (F_0(3-y)^2 + \frac{3p6^2}{2} - \frac{p6^2}{2} \cdot y)dy\right)$$

$$f = \frac{1}{IE}\left([0]_0^3 + 15\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 + \left[54p \cdot y - 18 \cdot p\frac{y^2}{2}\right]_0^3\right) = 42 \quad mm \rightarrow$$

16.12.

A deformáció számításhoz szükséges nyomaték függvények és deriváltjaik:

$$D-C \qquad M_1 = F \cdot x\,; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial F} = x$$

$$C-B \qquad M_2 = 3 \cdot F + \frac{p \cdot y^2}{2} \quad ; \quad \frac{\partial M_3}{\partial F} = 3$$

$$B-A \qquad M_3 = F \cdot (3-y) + p \cdot 4 \cdot 2 \quad ; \quad \frac{\partial M_3}{\partial F} = 3-y$$

$$f = \frac{1}{I \cdot E} \cdot \left(\int_0^3 F \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^4 \left(9F + \frac{3py^2}{2} \right) dy + \int_0^6 \left[F \cdot (3-y)^2 + 8p(3-y) \right] dy \right) =$$

$$= \frac{1}{I \cdot E} \cdot \left(\left[\frac{Fx^3}{3} \right]_0^3 + \left[9Fy + \frac{3py^3}{6} \right]_0^4 + \left[9Fy + F \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{6Fy^2}{2} + 24p \cdot y - \frac{8py^2}{2} \right]_0^6 \right) =$$

$$= 19 \quad mm \leftarrow$$

A koordinátarendszer szerint a
változó a D-C szakaszon y,
C-B szakaszon x,
B-A szakaszon y.

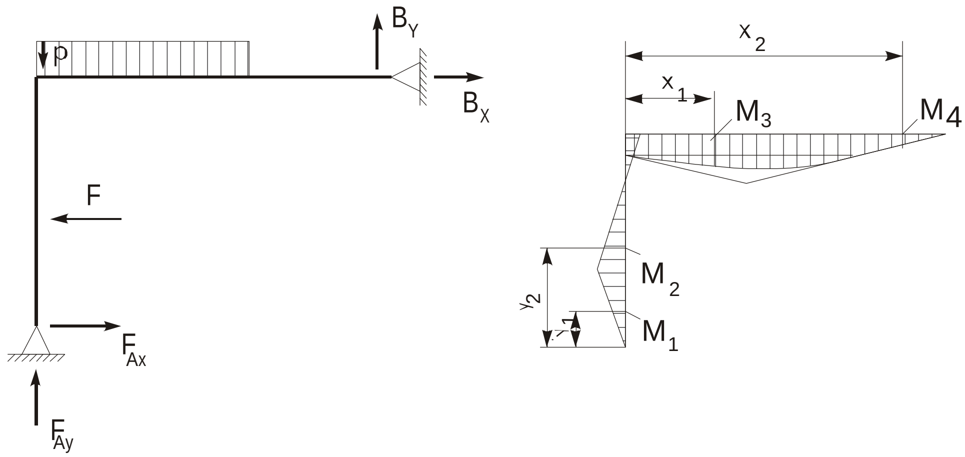
17.0 STATIKAILAG HATÁROZATLAN SZERKEZETEK

17.1.

Castiglianó-tételének alapján

$$y_\Delta = \frac{1}{IE}\int M(F)\,\frac{\partial M(F)}{\partial F_{Ay}}\cdot dl = 0\,,$$ azaz elmozdulás nincs.

Az ábrán felvett értelmű F_{Ax}; F_{az} szerint az alakhelyes nyomatéki ábra



A feladat megoldásához $M(F) = f(F_{Ay})$-ra van szükségünk, így:

$$\sum M_B = 0 = 5F_{Ay} - 3F_{Ax} + 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 3{,}5 \quad \text{melyből} \quad F_{Ax} = \frac{5}{3}F_{Ay} - 5$$

A nyomatékfüggvények, parciális deriváltjaik és az érvényességi tartományaik:

$$M_1 = F_{Ax}\cdot y_1 = \frac{5}{3}F_{Ay}\cdot y_1 - 5y_1; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial F_{Ay}} = \frac{5}{3}y_1 \quad ha: 0 \le y_1 \le 1 \quad m;$$

$$M_2 = F_{Ax}\cdot y_2 - F(y_2 - 1) = \frac{5}{3}F_{Ay}\cdot y_2 - 8y_2 + 3;$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial F_{Ay}} = \frac{5}{3}y_2\,; \quad ha: 1 \le y_2 \le 3 \quad m;$$

$$M_3 = 3F_{Ax} - 2F - F_{Ay}\cdot x_1 + \frac{px_1^2}{2} = 5F_{Ay} - F_{Ay}\cdot x_1 + x_1^2 - 21;$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial F_{Ay}} = 5 - x_1 \quad ha: 0 \le x_1 \le \quad m;$$

$$M_4 = 3F_{Ax} - 2\cdot F - F_{Ay}\cdot x_2 + 3p(x_2 - 1{,}5) = 5F_{Ay} - F_{Ay}\cdot x_2 + 6x_2 - 30;$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial F_{Ay}} = 5 - x_2\,; \quad ha: 3 \le x_2 \le 5 \quad m;$$

$$y_A = 0 = \frac{1}{IE}\left(\int_0^1 M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial F_{aY}}dy_1 + \int_1^3 M_2 \cdot \frac{\partial M_3}{\partial F_{aY}}dx_1 + \int_0^3 M_3 \cdot \frac{\partial M_3}{\partial F_{AY}}dx_1 + \int_3^5 m_4 \cdot \frac{\partial M_4}{\partial F_{aY}}dx_2\right)$$

Mivel az $\frac{1}{IE} \neq 0;$ ezért

$$0 = \int_0^1\left(\frac{5}{3}F_{Ay}\cdot y_1 - 5\cdot y_1\right)\cdot\left(\frac{5}{3}y_1\right)\cdot dy_1 + \int_1^3\left(\frac{5}{3}F_{Ay}\cdot y_2 - 8\cdot y_2 + 3\right)\cdot\left(\frac{5}{3}y_2\right)dy_2 +$$

$$+\left(\frac{5}{3}y_2\right)dy_2 + \int_0^3\left(5\cdot F_{Ay} - F_{Ay}\cdot x_1^2 - 21\right)\cdot(5 - x_1)dx_1 + \int_3^5\left(5F_{Ay} - F_{Ay}\cdot x_2 + 6x_2 - 30\right)\cdot$$

$$\cdot(5 - x_2)dx_2$$

Az összevonásokat és az integrálást és behelyettesítést elvégezve:

$0 = 66{,}67\ F_{Ay} - 310{,}1 \quad ; \quad F_{Ay} = 4.65 \quad kN$

egyenletekből:

$F_{Ax} = 2{,}75 \quad kN \quad ; \quad F_{Bx} = 0{,}25 \quad kN \quad ; \quad F_{By} = 1{,}35 \quad kN$

A számításoknál adódott pozitív eredmények előzetesen felvett erő-
Értelmeket igazolják !

Betti - tételének segítségével:

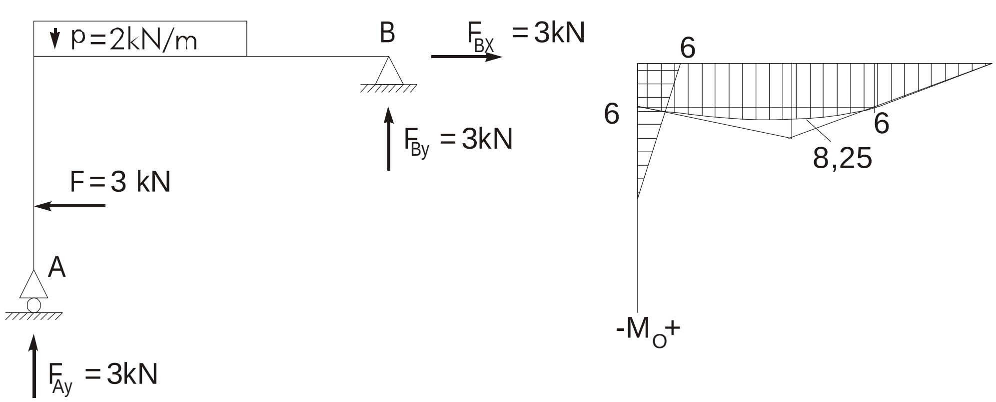
$$x_A = \frac{\partial U}{\partial F_{Ax}} = 0 = \frac{1}{IE}\int_l M(x)^2 ds, \quad ahol$$

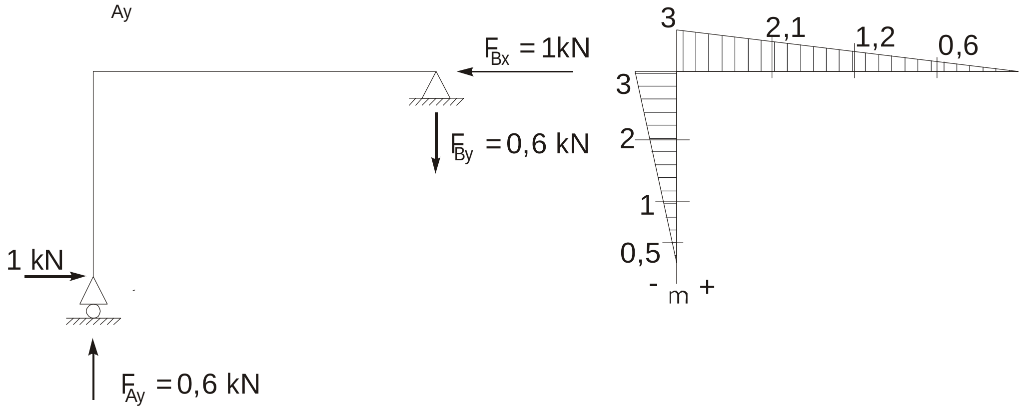
$$M(x) = M_0 + m\cdot F_{Ax}, \quad így \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F_{Ax}} = m \quad ;$$

$$x_A = 0 = \frac{1}{IE}\int_l (M_0 + F_{Ax}\cdot m)\cdot m\cdot ds$$

$$\int_l M_o\cdot mds + F_{Ax}\cdot\int_l m^2\cdot ds = 0 \rightarrow \quad F_{Ax} = -\frac{\int_{(l)} M_0\cdot mds}{\int_{(l)} m^2\cdot ds}$$

M_0 - a határozottá tett szerkezet (törzstartó) nyomatéki függvénye
m - az egységnyi teher nyomatéki függvénye





Közelítő számítási eljárással

$$\int_l M_0 \cdot mdl = \sum \frac{l}{6}\left[M_{0b} \cdot m_b + 4M_{ok} \cdot m_k + M_{oj} \cdot m_j\right]$$

$$\int_l m^2 dl = \sum \frac{l}{6}\left[m_b^2 + 4m_k^2 + m_j^2\right]$$

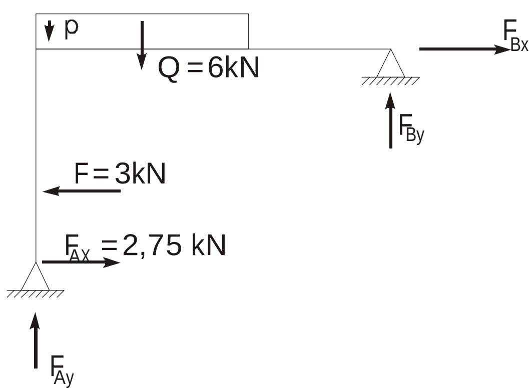
Így a feladat adatai szerint

$$\int_l M_0 \cdot mdl = \frac{2}{6}[-4\cdot 3\cdot 2-3\cdot 6]+\frac{3}{6}[-3\cdot 6-4\cdot 8{,}25\cdot 2{,}1-1{,}2\cdot 6]+$$

$$+\frac{2}{6}[-6\cdot 1{,}2-4\cdot 3\cdot 0{,}6]=-66{,}05\ kN^3$$

$$\int_l m^2 dl = \frac{3}{6}\left[4\cdot 1{,}5^2+3^2\right]+\frac{5}{6}\left[3^2+4\cdot 1{,}5^2\right]=24m^3$$

$$F_{Ax}=-\frac{-66{,}05}{24}=2{,}75 \quad kN$$



$$\sum M_B = 0 = 6\cdot 3{,}5-3\cdot 2+2{,}75\cdot 3-5\cdot F_{Ay} \Rightarrow$$

$F_{Ay} = 4{,}65 \quad \mathrm{kN}$

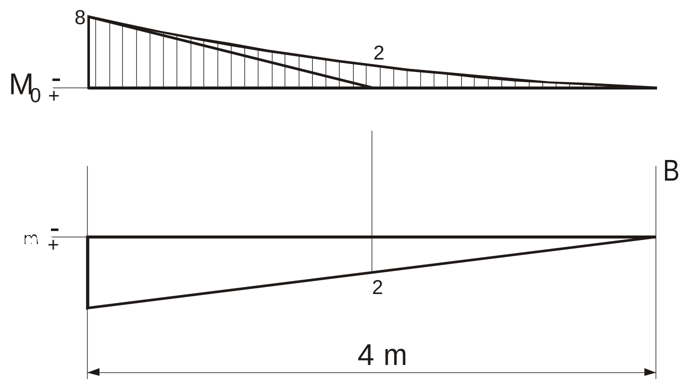
$$\sum X_i = 0 = 2{,}75-3+F_{Bx}$$

$F_{Bx}\ 0{,}25 \quad \mathrm{kN}$

$$\sum Y_i = 0 = 4{,}65-6+F_{By}$$

$F_{By} = 1{,}35 \quad \mathrm{kN}\Im$

17.2.



17.2

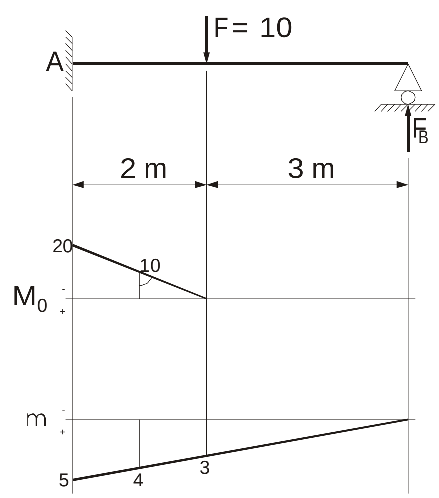
$$F_B = -\frac{\int M_0 m dx}{\int m^2 dx} = \frac{32}{21{,}33} = 1{,}5\ kN$$

$$\int_{x=0}^{4} M_0 m dx = \frac{4}{6}(-4\cdot 8 - 4\cdot 2\cdot 2) = -32\ kNm^3$$

$$\int m^2 dx = \frac{4}{6}(16 + 4\cdot 4) = 21{,}333\ m^3$$

$$F_A = 2{,}5\ kN \quad ; \quad M_A = 2\ kNm$$

17.3.



17.3

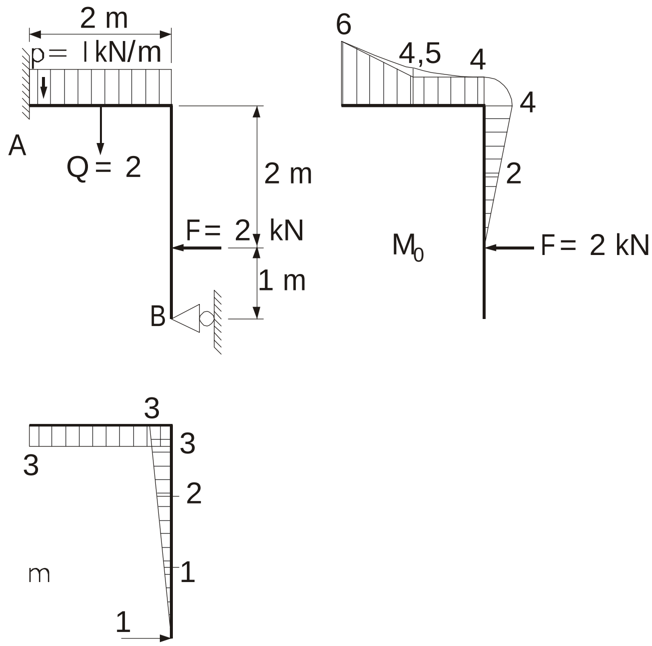
$$\int M_0 m dx = -\frac{2}{6}(20\cdot 5 + 4\cdot 10\cdot 4) = -86{,}667\ kNm^3$$

$$m^2 dx = \frac{5}{6}\left(25 + 4\cdot 2{,}5^2\right) = 41{,}66\ m^3$$

$$\int F_B = -\frac{\int M_0 m dx}{\int m^2 dx} = 2{,}08\ kN$$

$$F_A = 7{,}92\ kN \quad ; \quad M_A = 9{,}6\ kNm$$

17.4.



17.4

$$\int m^2 ds = \frac{3}{6}\left(4\cdot 1{,}5^2 + 3^2\right) + \frac{2}{6}\left(6\cdot 3^2\right) = 9 + 18 = 27\ m^3$$

$$\int M_0 m ds = \frac{2}{6}\left[4\cdot 2(-2) - 3\cdot 4\right] + \frac{2}{6}\left(-3\cdot 4 - 4\cdot 4{,}5\cdot 3 - 3\cdot 6\right) =$$

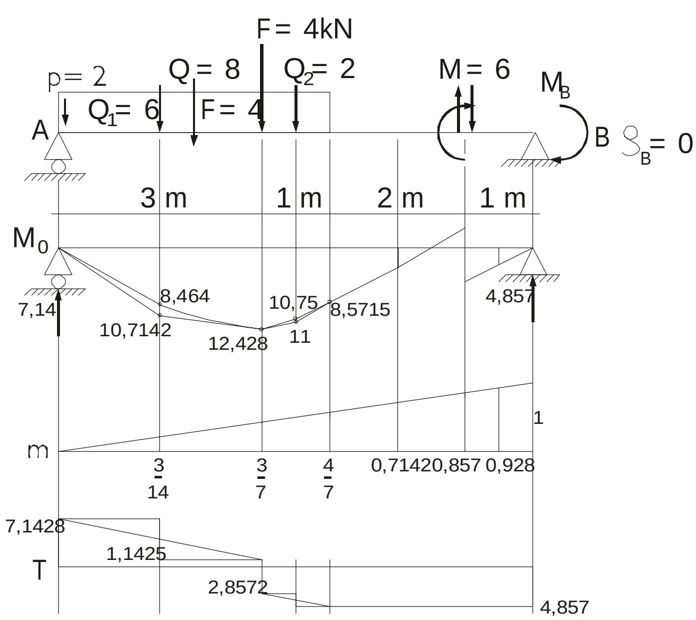
$$= \frac{-56 + (-164)}{6} = \frac{-220}{6} = -37{,}33\ kNm^3$$

$$F_B = 1{,}383\ kN$$

$$F_{AX} = 0{,}617\ kN \quad ; \quad F_{AY} = 2\ kN \quad ; \quad M_A = 1{,}851\ kNm$$

17.5.

17.5



$$F_A = \frac{40 + 16 - 6}{7} = 7{,}143 kN$$

$$F_B = \frac{16 + 12 + 6}{7} = 4{,}857 kN$$

$$\int m^2 ds = \frac{7}{6}\left(1^2 + 4\cdot 0{,}5^2\right) = 2{,}33\ m^3$$

$$\int M_0 \cdot m ds = \frac{3}{6}\left(-4\cdot 8{,}464\cdot\frac{3}{14} - 12{,}428\frac{3}{7}\right) + \frac{1}{6}\left(12{,}4\right.$$

$$+ \frac{2}{6}\left[8{,}5715\frac{-4}{7} + 4\cdot 3{,}714(-0{,}7142) + 0{,}98\right] + \frac{1}{6}\left[4{,}8\right.$$

$$= -18{,}6\ kNm^3$$

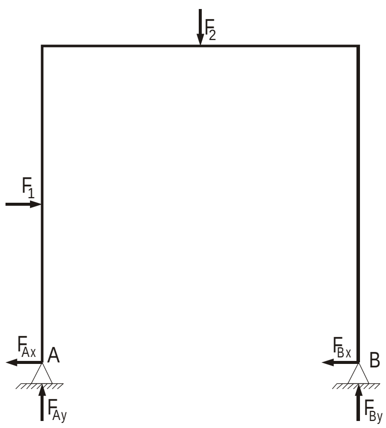
$$M_B = \frac{-18{,}6}{-2{,}33} = 7{,}983\ kNm \quad ; \quad F_A = 7{,}143\ kNm \quad ;$$

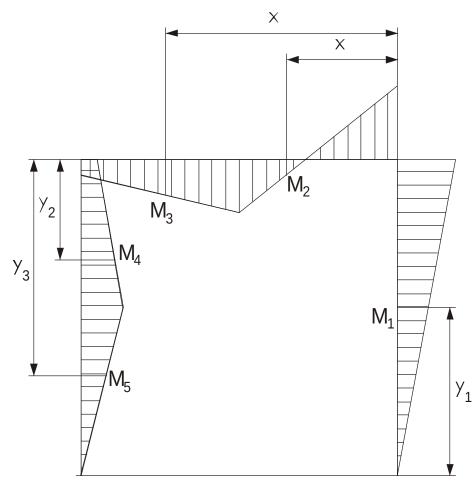
17.6.

Castiglianó-tételének alapján:

$$X_B = \frac{1}{IE}\int_l M(F)\cdot\frac{\partial M(F)}{\partial F_{Bx}}\cdot dl = 0$$

Az ábrán felvett értelmű F_{AX} ; F_{AY} szerint az alakhelyes nyomatéki ábra:





$$\sum M_A = 0 = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - F_{By}\cdot 6 \rightarrow F_{By} = 3\,kN$$

A nyomaték függvények, parciális deriváltjaik és az érvényességi tartományaik:

$$M_1 = -F_{Bx}\cdot y_1 \quad ; \qquad \frac{\partial M_1}{\partial F_{Bx}} = -y_1 \quad , \quad ha \quad 0 \le y_1 \le 6\,.$$

$$M_2 = -F_{Bx}\cdot 6 + 3\cdot x_1 \quad ; \qquad \frac{\partial M_2}{\partial F_{Bx}} = -6 \quad , \quad ha \quad 0 \le x_1 \le 3\,.$$

$$M_3 = -F_{Bx}\cdot 6 + 3(x_2 + 3) - 4\cdot x_2 \quad ; \qquad \frac{\partial M_3}{\partial F_{Bx}} = -6 \quad , \quad ha \quad 0 \le x_2 \le 3\,.$$

$$M_4 = -F_{Bx}\cdot 6 + 6\cdot 3 - 4\cdot 3 + F_{Bx}\cdot y_2 \; ; \qquad \frac{\partial M_4}{\partial F_{Bx}} = y_2 - 6\,, \quad ha \quad 0 \le y_2 \le 3\,.$$

$$M_5 = -F_{Bx}\cdot 6 + 6\cdot 3 - 4\cdot 3 + F_{Bx}(3 + y_3) - 2\cdot y_3 \; ; \qquad \frac{\partial M_5}{\partial F_{Bx}} = y_3 - 3\,, \quad ha \quad 0 \le y_3 \le 3\,.$$

$$x_B = 0 = \frac{1}{IE}\left[\int_0^6 M_1\cdot\frac{\partial M_1}{\partial F_{Bx}}dy_1 + \int_0^3 M_2\cdot\frac{\partial M_2}{\partial F_{Bx}}dx_1 + \int_0^3 M_3\cdot\frac{\partial M_3}{\partial F_{Bx}}dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^3 M_4\cdot\frac{\partial M_4}{\partial F_{Bx}}dy_2 + \int_0^3 M_5\cdot\frac{\partial M_5}{\partial F_{Bx}}dy_3 \;\right].$$

Mivel $\frac{1}{IE} \neq 0$, ezért

$$0 = \int_0^6 \left(-F_{Bx} \cdot y_1\right) \cdot \left(-y_1\right) dy_1 + \int_0^3 \left(-F_{Bx} \cdot 6 + 3x_1\right) \cdot \left(-6\right) dx_1 +$$

$$+ \int_0^3 \left(-6 \cdot F_{Bx} + 3x_2 + 9 - 4 \cdot x_2\right) \cdot \left(-6\right) dx_2 + \int_0^3 -\left(6F_{Bx} + 18 - 12F_{Bx} \cdot y_2\right) \cdot \left(y_2 - 6\right) dy_2 +$$

$$+ \int_0^3 \left(-6F_{Bx} + 18 - 12 + 3F_{Bx} \cdot F_{Bx} \cdot y_3 - 2 \cdot y_3\right) \cdot \left(y_3 - 3\right) dy_3 \ .$$

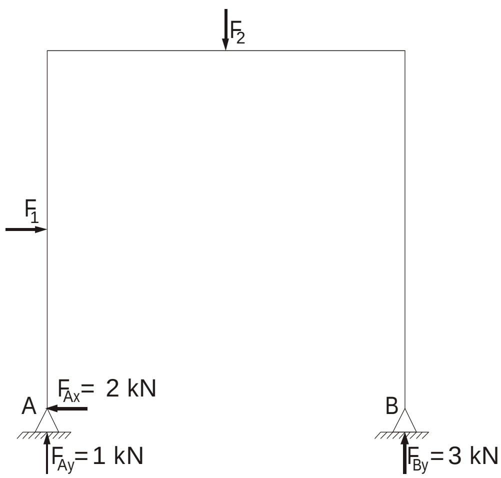
Az összevonásokat, az integrálást és a behelyettesítést elvégezve:

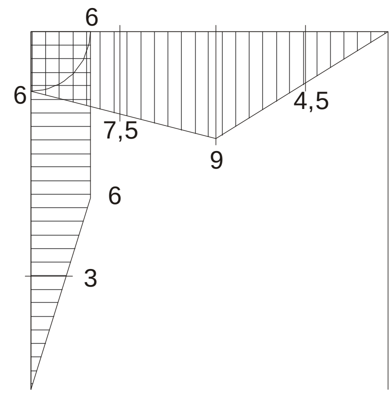
$$F_{Bx} = \frac{315}{360} = 0{,}875 \quad kN$$

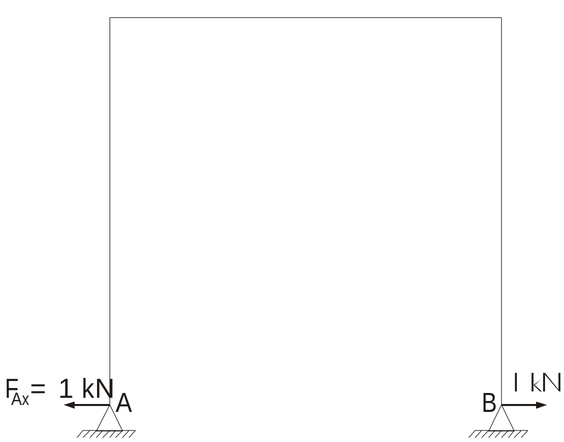
A további reakciók a statikai egyenletekből:

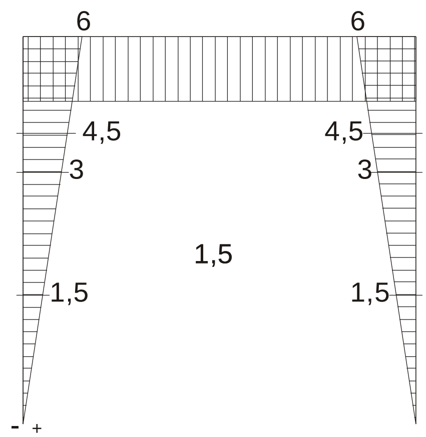
$F_{By} = 3 \quad kN \quad ; \quad F_{Ax} = 1{,}125 \quad kN \quad ; \quad F_{Ay} = 1 \quad kN$

<u>Betti tételének segítségével</u>









$$x_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bx}} = 0 = \frac{1}{IE} \int_l M\left(x\right)^2 dl \qquad \text{ahol}$$

$$M(x) = M_0 + m \cdot F_{Bx}, \quad \acute{\imath}gy \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F_{Bx}} = \quad m$$

$$x_B = 0 = \frac{1}{IE}\int_l (M_0 + m \cdot F_{Bx})mdl \qquad F_{Bx} = -\frac{\int_l M_0 mdl}{\int_l M^2 dl}$$

$$\int_l M_0 \cdot mdl = \frac{3}{6}[4 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 6] + \frac{3}{6}[3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 6] + \frac{3}{6}[6 \cdot 6 + 4 \cdot 7{,}5 \cdot 6 + 9 \cdot 6] +$$

$$+ \frac{3}{6}[6 \cdot 9 + 4 \cdot 6 \cdot 4{,}5] = 315\ kNm^3$$

$$\int_l m^2 dl = 2 \cdot \frac{6}{6}\left[4 \cdot 3^2 + 6^2\right] + \frac{6}{6}\left[6^2 + 4 \cdot 6^2 + 6^2\right] = 360\ m^3$$

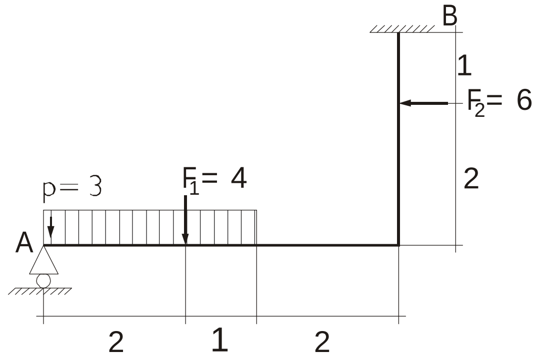
$$F_{Bx} = -\frac{315}{360} = -0{,}875 \quad kN$$

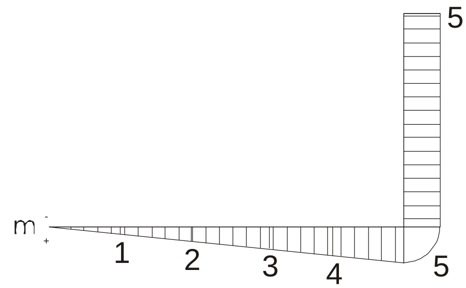
Tehát az „1 kN”-os erő felvett értelmével ellentétes a tényleges „F_{Bx}” reakcióerő.

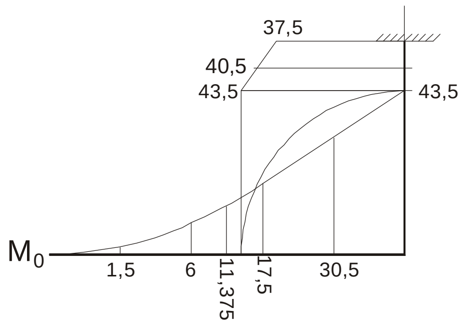
A további reakcióerők: $F_{By} = 3 \quad kN \quad ; \quad F_{Ax} = 1{,}125 \quad kN \quad ; \quad F_{Ay} = 1 \quad kN$.

17.7.

Az **A** pontban a támasz elhagyásával tesszük határozottá a tartót.







$$\int m^2 ds = \frac{5}{6}\left(4 \cdot 2{,}5^2 + 5^2\right) + \frac{3}{6}\left(6 \cdot 5^2\right) = 116{,}67\ m^3$$

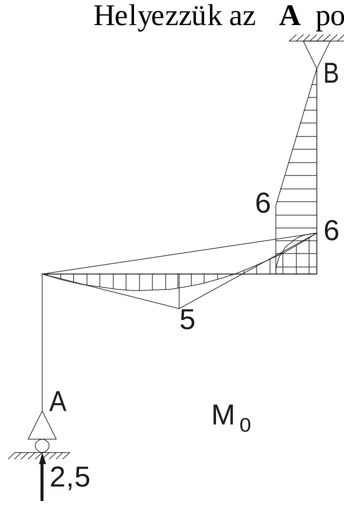
$$\int M_0 mds = 925{,}88\ kNm^3$$

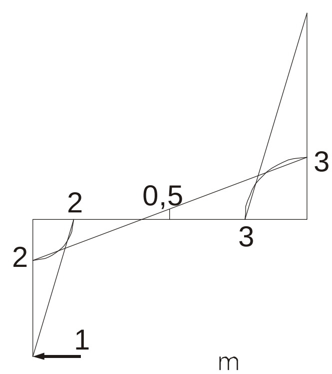
$$F_A = \frac{\int M_{0 \cdot mds}}{\int m^2 ds} = 7{,}936\ kN \quad ; \quad F_{BY} = 5{,}064\ kN$$

$$F_{BX} = 6\ kN \quad ; \quad M_B = 2{,}18\ kNm$$

17.8.

Helyezzük az **A** pontban támasztást a csukló helyett.





17.8

$$\int m^2 ds = \frac{2}{6}\left(4\cdot 1^2 + 2^2\right) + \frac{4}{6}\left(2^2 + 4\cdot 0{,}5^2 + 3^2\right) + \frac{3}{6}\left(3^3 + 4\cdot 1{,}5^2\right) = 21\, m^3$$

$$\int M_0 \cdot m ds = \frac{4}{6}\left[4\cdot 1(-0{,}5) + 6\cdot 3\right] + \frac{1}{6}\left(3\cdot 6 + 4\cdot 2{,}5\cdot 6 + 6\cdot 2\right) + \frac{2}{6}\left(6\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 3\right) = 33{,}667\, kNm^3$$

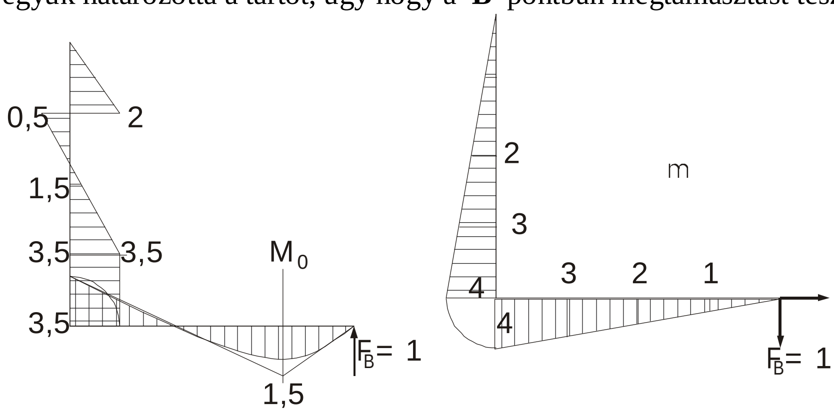
$$F_{AX} = \frac{-33{,}667}{21} = 1{,}6\, kN$$

$$F_{AY} = 4{,}5\, kN$$

$$F_{BX} = 1{,}4\, kN \quad ; \quad F_{BY} = 3{,}5\, kN$$

17.9.

Tegyük határozottá a tartót, úgy hogy a **B** pontban megtámasztást teszünk.



17.9

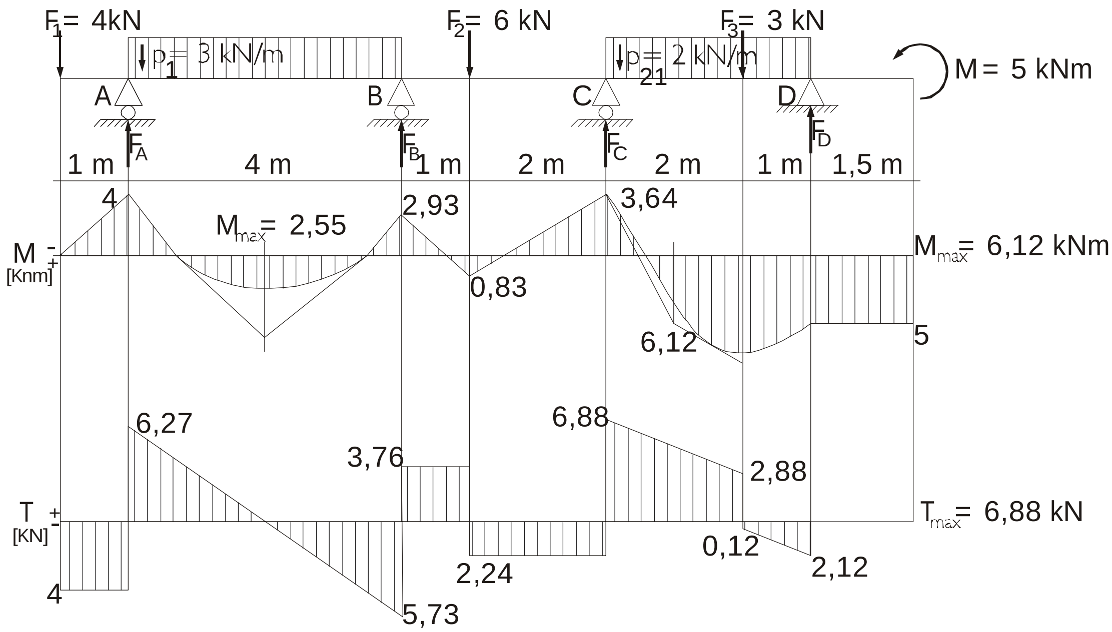
$$\int m^2 ds = 2\cdot\frac{4}{6}\left(4\cdot 2^2 + 4^2\right) = 42{,}67\, m^3$$

$$\int M_0 \cdot m ds = \frac{3}{6}\left(4\cdot 1{,}5\cdot -0{,}375 + 1{,}5\cdot 3\right) + \frac{1}{6}\left(3\cdot 1{,}5 + 4\cdot 3{,}5\cdot 2{,}5 + 3{,}5\cdot 4\right) + \frac{1}{6}3{,}5\left(4 + 4\cdot 3{,}5 + 3\right) +$$

$$+\frac{2}{6}\left(3{,}5\cdot 3 + 4\cdot 1{,}5\cdot 2 - 1\cdot 0{,}5\right) + \frac{1}{6}\left(2\cdot 1 + 4\cdot 0{,}5\cdot 1\right) = 30{,}295\, kNm^3$$

$$X_B = \frac{33{,}656}{42{,}66} = 0{,}71\, kN \quad ; \quad Y_B = 1{,}71\, kN \quad ; \quad X_A = 1{,}29\, kN \quad ; \quad Y_A = 1{,}29\, kN$$

17.10.

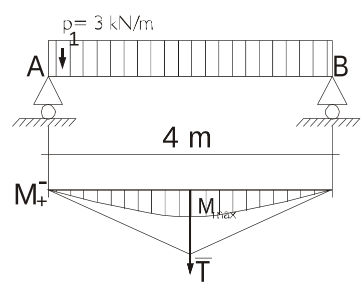


17.10

Az "ABC" szakaszra felírt Clapeyron egyenlet

$$M_A \cdot l_{AB} + 2M_B \cdot (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = -\frac{6}{l_{AB}}[M_K]_A - \frac{6}{l_{BC}}[M_K]_C$$

$[M_K]_A$ az "AB" különálló szakasz nyomatéki ábrájának a nyomatéka az "A" pontra



$$M_{\max} = p_1 \cdot \frac{l_{AB}^2}{8}\,[kNm];$$

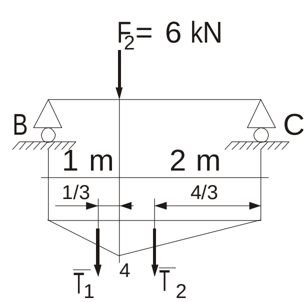
$$\overline{T} = \frac{2}{3} M_{\max} \cdot l_{AB}\,[kNm^2];$$

$$[M_K]_A = \frac{l_{AB}}{2} \cdot \overline{T} = p_1 \cdot \frac{l_{AB}^4}{24} = 3 \cdot \frac{4^4}{24} = 32\,kNm^3\,.$$

$[M_K]_C$ a "BC" különálló szakasz nyomatéki ábrájának nyomatéka a "C" pontra.

$$\overline{T}_1 = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2\,kNm^2\,; \quad \overline{T}_2 = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,kNm^2\,,$$

$$[M_K]_C = \frac{7}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot 4 = 10\,kNm^3\,.$$



Viszahelyettesítve a Clapeyron egyenletbe

$$-4 \cdot 4 + 2M_B(4+3) + M_C \cdot 3 = -\frac{6}{4} \cdot 32 - \frac{6}{3} \cdot 10$$

Rendezve: $14M_B + 3M_C = -52$

A "BCD" szakaszra felírt Clapeyron egyenlet:

$$M_B \cdot l_{BC} + 2M_C(l_{BC} + l_{CD}) + M_D \cdot l_{CD} = -\frac{6}{l_{BC}}[M_K]_B - \frac{6}{l_{CD}}[M_K]_D$$

$[M_K]_B$ a "BC" különálló szakasz nyomatéki ábrájának nyomatéka a "B" pontra (előző ábra)

$$[M_K]_B = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{5}{3}\cdot 4 = 8 \text{ kNm}^3$$

$[M_K]_D$ a "CD" különálló szakasz nyomatéki ábrájának nyomatéka a "D" pontra: szuperpozicióval:

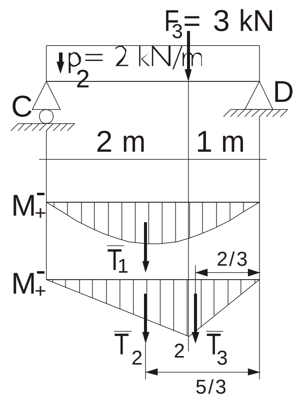
$$[M_K]_{D1} = p_2 \cdot \frac{l_{CD}^4}{24} = 2\cdot\frac{3^4}{24} = 6{,}75\ kNm^3$$

$$\overline{T}_2 = \frac{2\cdot 2}{2} = 2\ kNm^2\ ;\quad \overline{T}_3 = \frac{2\cdot 1}{2} = 1\ kNm^2$$

$$[M_K]_{D2} = 2\cdot\frac{5}{3} + 1\cdot\frac{2}{3} = 4\ kNm^3\ ,$$

így:

$$[M_K]_D = [M_K]_{D1} + [M_K]_{D2} = 6{,}75 + 4 = 10{,}75\ kNm^3\ .$$



Visszahelyettesítve a Clapeyron egyenletbe:

$$M_B \cdot 3 + 2\cdot M_C(3+3) + 5\cdot 3 = -\frac{6}{3}\cdot 8 - \frac{6}{3}\cdot 10{,}75$$

rendezve: $3M_B + 12M_C = -52{,}5$ (2)

az (1) és (2) egyenletből:

M_C = - 3,642 kNm,

M_B = - 2,934 kNm.

A reakciók: (az ismert nyomatéki metszékek felírásával)

$$M_B\ bal = -2{,}934 = -5\cdot 4 + 4\cdot F_A - 12\cdot 2 \quad \Rightarrow F_A = 10{,}27\ kN,$$

$$M_C\ bal = -3{,}64 = -8\cdot 4 + 10{,}27\cdot 7 - 12\cdot 5 + 3\cdot F_B - 6\cdot 2 \Rightarrow F_B = 9{,}49\ kN,$$

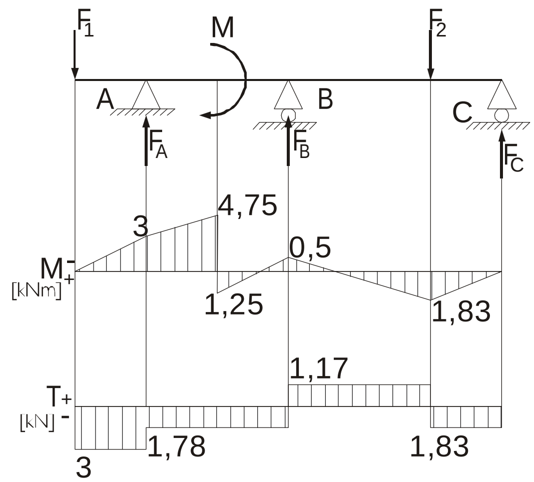
$$M_C\ jobb = -3{,}64 = 5 - 2\cdot 3 - 1{,}5\cdot 6 + 3\cdot F_D \quad \Rightarrow F_D = 2{,}12\ kN,$$

$$\sum F_{yi} = 0 = -4 - 12 - 6 - 3 - 6 + 10{,}27 + 9{,}49 + 2{,}12 + F_C \quad \Rightarrow F_C = 9{,}12\ kN\ .$$

Az ismert kényszererőkkel az igénybevételi ábrák megrajzolhatók!

17.11.

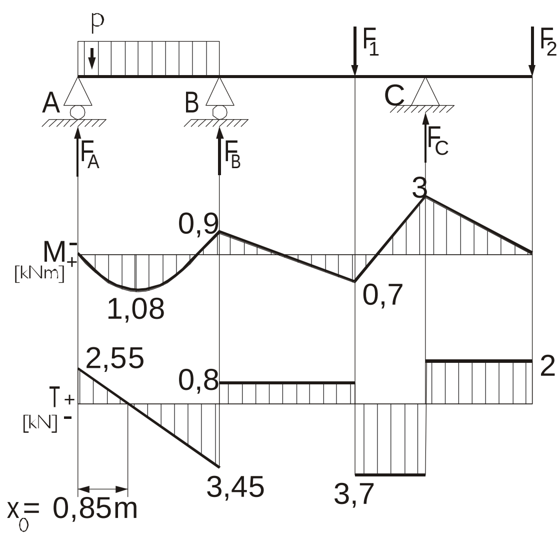
$M_B = -0{,}5\,\mathrm{kNm}$; $F_A = 1{,}25\,\mathrm{kN}$; $F_B = 2{,}92\,\mathrm{kN}$; $F_C = 1{,}83\,\mathrm{kN}$



17.11

17.12.

$M_B = -0{,}9\,kNm$; $F_A = 2{,}55\,kN$; $F_B = 4{,}25\,kN$; $F_C = 5{,}7\,kN$

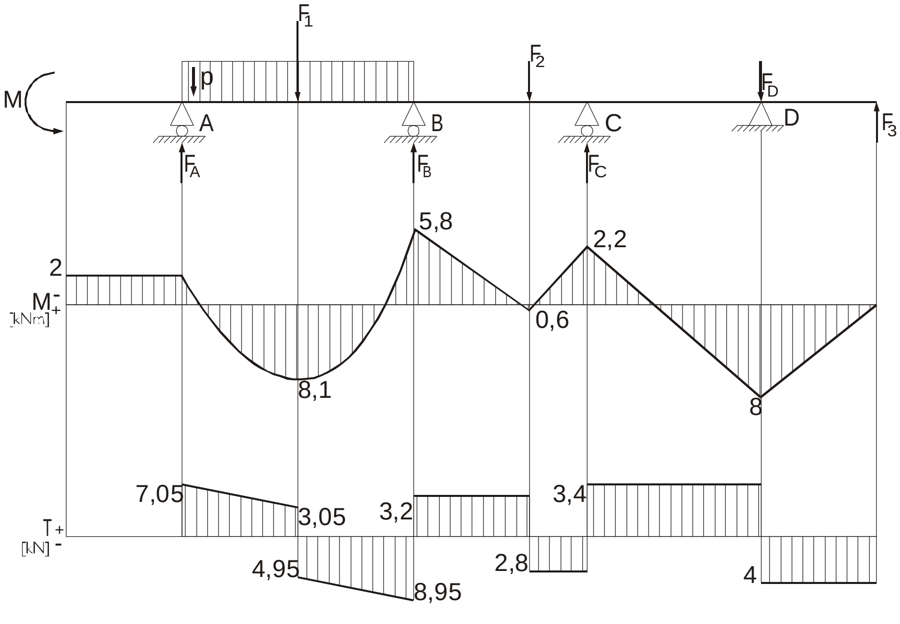


17.12

17.13.

$M_B = -5{,}81\,\mathrm{kNm}$; $M_C = -2{,}21\,\mathrm{kNm}$

$F_A = 7{,}05\,\mathrm{kN}$; $F_B = 12{,}15\,\mathrm{kN}$; $F_C = 6{,}2\,\mathrm{kN}$; $F_D = 7{,}4\,\mathrm{kN}$



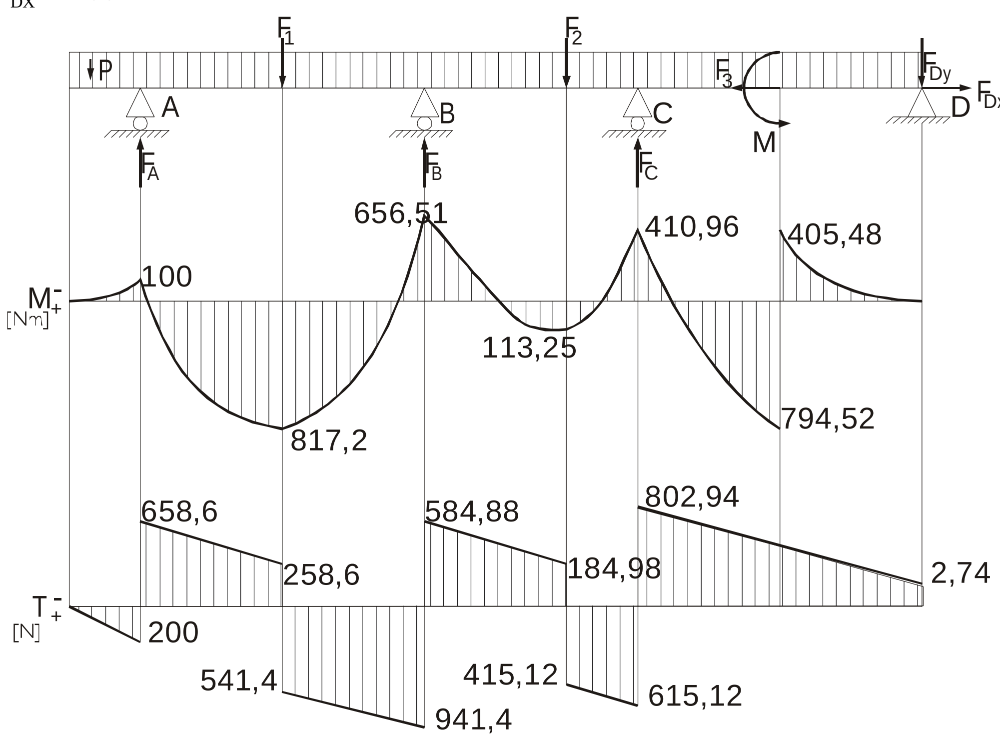
17.13

17.14.

$M_B = -665{,}6\ \text{Nm}$; $M_C = -410{,}65\ \text{Nm}$

$F_A = 858{,}6\ \text{N}$; $F_B = 1526{,}38$; $F_C = 1417{,}68\ \text{N}$; $F_{Dy} = 2{,}66\ \text{N};$

$F_{DX} = 400\ \text{N}$



17.14

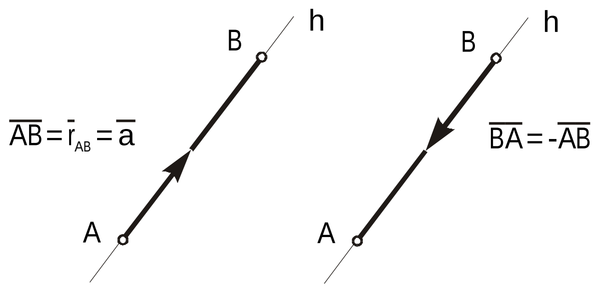
F Ü G G E L É K

A függelék a vektorszámítás rövid nyilvánvalóan nem teljes összefoglalása. Csak azokat a részeket tartalmazza – minden levezetés és bizonyítás nélkül – melyek tudása szükséges a Műszaki mechanika című tantárgy megértéséhez.
Az anyagban a vektorok erő jellegét hangsúlyozzuk ami természetesen a téma általánosságát nem sérti.

A VEKTOR FOGALMA

Vektornak nevezzük az olyan fizikai, vagy geometriai mennyiséget, amely számszerű értékével /abszolút értékével/ és irányával adható meg. Ezen tulajdonságuk alapján a vektorokat irányított egyenes szakaszokkal szemléltetjük. Az irányított egyenes szakasz hossza a vektor abszolút értékével arányos. Az erővektorok ábrázolásakor használt N_F = 5 kN/cm lépték pl. azt jelenti, hogy az egyenes szakasz 1 cm-re 5 kN abszolút értékű erővektornak felel meg.

Ugyanazon egyenes szakasz segítségével két vektort /két irányt/ értelmezhetünk.
/1. ábra/



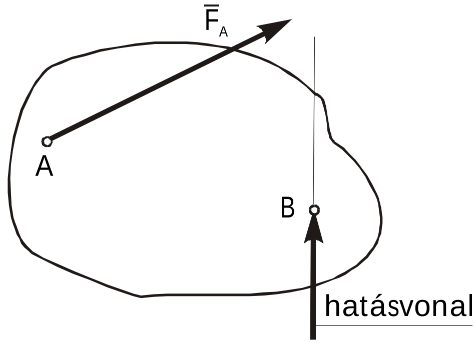
1.ábra

Az abszolút érték jelölése:

$$\left|\overline{A}\overline{B}\right| = \left|\bar{r}_{AB}\right| = \left|\bar{a}\right| = a$$

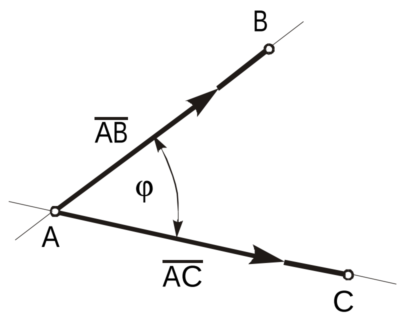
A zérus abszolút értékű vektor <u>zérusvektor</u>, az egységnyi abszolút értékű vektor az <u>egységvektor.</u>

A mechanikában előforduló vektorokat általában a testek pontjaihoz kötöttnek gondoljuk és ezen pontot a vektor támadáspontjának nevezzük.
Az ilyen vektorokat helyhez kötött vektoroknak nevezzük.
/2. ábra/



2.ábra

Két vektor egyenlő, ha abszolút értékük megegyezik, és egyező irányúak.
Két vektor által bezárt szög alatt a vektorok irányai által meghatározott azonos kezdőpontú félegyenesek által bezárt kisebb szöget értjük.
/3. ábra/



3.ábra

<u>Vektor és skalár szorzata</u>

Az $\bar{a}$ vektor és a p sakalár szorzata olyan $\bar{b}$ vektor:

$$\bar{b} \quad = \quad p \cdot \bar{a} \quad = \quad \bar{a} \cdot p$$

melynek abszolút értéke:

$$\left|\bar{b}\right| \quad = \quad p \cdot \left|\bar{a}\right|$$ és iránya az $\bar{a}$ vektor irányával egyező.

Bármely vektor úgy tekinthető, mint abszolút értékének és az irányát kijelölő egységvektornak a szorzata.

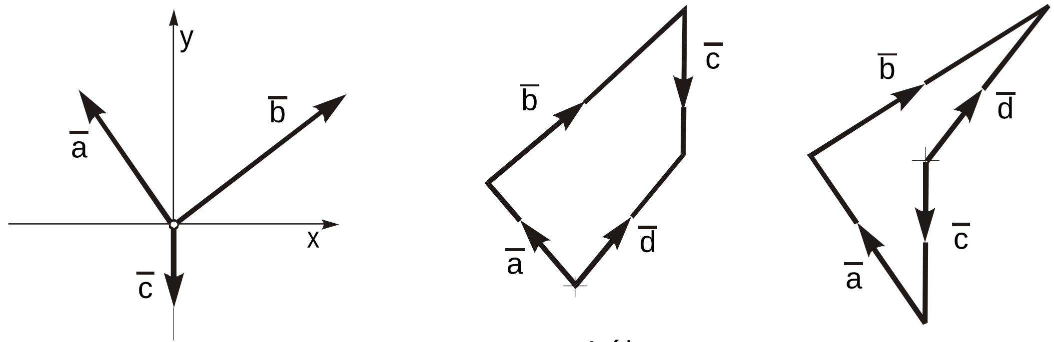
$$\bar{a} \quad \left|\bar{a}\right| \cdot \bar{e} \quad ; \quad \left|\bar{e}\right| = \quad 1$$

<u>Vektorok összeadása és kivonása</u>

A vektorokat úgy összegezhetjük, mint az irányított egyenes szakaszokat.

$$\bar{d} \quad = \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \quad = \quad \bar{c} + \bar{a} + \bar{b} = ...$$

A vektor összegezésének eredménye független az összegezés sorrendjétől /4.ábra/
Például az x, y koordináta rendszerben adott vektorokat összegezzük.



4.ábra

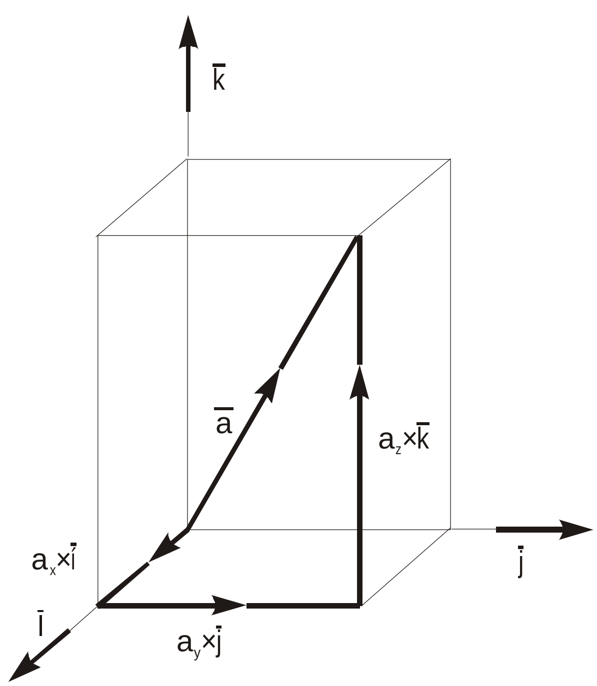
A vektorok kivonása:

$$\bar{c} \;=\; \bar{a} - \bar{b} \;=\; \bar{a} + \left(-\bar{b}\right) = \; \bar{a} + \bar{h}$$

$$\bar{h} \;=\; -\bar{b}$$

Koordináta rendszer

Legyen $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; $\left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1$ a Descartesi derékszögű koordináta-rendszer tengelyeit kijelölő egységvektor. /5. Ábra/



5.ábra

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}\,.$$

Szokásos még az egységvektorok alábbi jelölése is:

$$\bar{e}_x = \bar{i}; \quad \bar{e}_y = \bar{j}; \quad \bar{e}_z = \bar{k}\,.$$

Az $/\bar{i}, \;\bar{j}, \;\bar{k}/$ a Descartes- féle bázis, amelynek elemei a Descartes-féle bázisvektorok. Az a_x, a_y, a_z az $\bar{a}$ vektor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ bázisra vonatkozó koordinátái.

Vektorok közötti szorzások

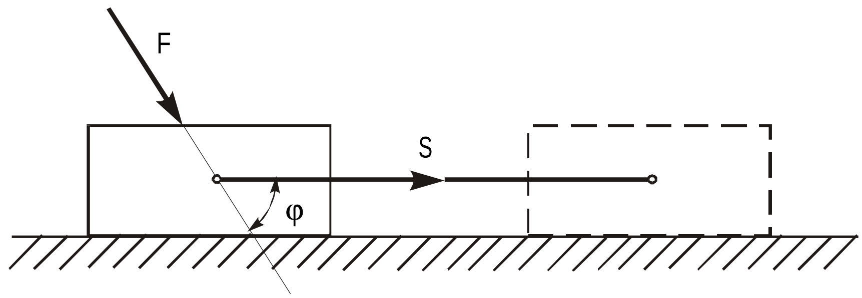
Két vektor skaláris szorzata

$$d = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot = \bar{b} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos j \ ,$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \ .$$

Ha egy testre $\bar{F}$ erő hat és a test $\bar{s}$
elmozdulást végez, úgy a végzett munka:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{d} = |\bar{F}| \cdot |\bar{s}| \cdot \cos j \ .$$



6.ábra

A bázisvektorok skaláris szorzatai:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1 \, ,$$

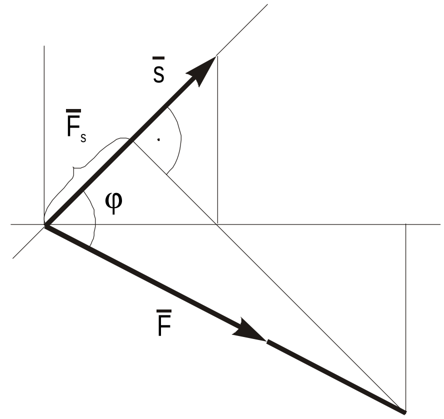
$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \, .$$

A vektorok skaláris szorzatának értelmezése lehetőséget ad két vektor által bezárt szög számítására

$$\cos j = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \, .$$

Most nézzünk egy alkalmazást.
Határozzuk meg az $\bar{F} = /5i - 3j/$ [N]
erőnek az $\bar{s} == 2\bar{i} + 2\bar{j}\,/$ $[m]$ elmozdulás vektor irányába eső vetületét!
/7. Ábra/

$N_F = 1$ N/cm
$N_s = 1$ m/cm



7.ábra

$$F_s = \left|\overline{F}\right| \cdot \cos j = \left|\overline{F}\right| \cdot \frac{\overline{F} \cdot \overline{s}}{\left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{s}\right|} = \overline{F} \cdot \frac{\overline{s}}{\left|\overline{s}\right|} = \overline{F} \cdot \overline{s}^{\,0}$$

ahol: $\overline{s}^{\,0} = \dfrac{\overline{s}}{\left|\overline{s}\right|}$ az $\overline{s}$ vektorral egyező irányú egységvektor

Most:

$$\overline{s}^{\,0} = \frac{2}{\sqrt{8}}\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\overline{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\overline{j}$$

$$F_s = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \quad [N].$$

<u>Két vektor vektorális szorzata</u>

$\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok vektorális szorzata az a $\overline{c}$ vektor, amelynek abszolút értéke:

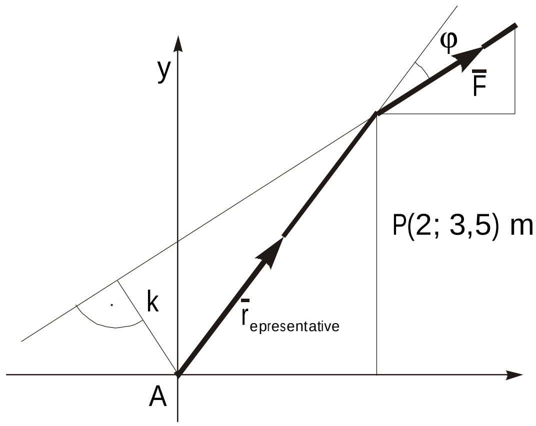
$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}x\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \quad \sin j$$

Irása: $\overline{a}x\overline{b}$ vektor merőleges az $\overline{a}$ $és$ $\overline{b}$ vektorok síkjára, $\overline{a}x\overline{b}$ irányát a jobb csavar szabály határozza meg.

Az xyz koordináta rendszer egységvekorainak vektoriális szorzatai:

$$\overline{i} \quad x \quad \overline{i} = \overline{j} \quad x \quad \overline{j} = \overline{k} \quad x \quad \overline{k} = 0$$
$$\overline{i} \quad x \quad \overline{j} = \overline{k}; \quad \overline{j} \quad x \quad \overline{k} = \overline{i}; \quad \overline{k} \quad \overline{i} = \overline{j}$$
$$\overline{j} \quad x \quad \overline{i} = -\overline{k}; \quad \overline{k} \quad x \quad \overline{j} = -\overline{i}; \quad \overline{i} \quad x \quad \overline{k} = -\overline{j}$$

Határozzuk meg az $\overline{F} = /\,4\overline{i} + 3\overline{j}\,/ \quad [kN]$
erőnek az A pontra vonatkozó nyomatékát!
/8. ábra/



$$\overline{M}_A = \bar{r}_p x \overline{F}$$

8.ábra

Korábbi tanulmányokból ismert, hogy a nyomaték:

$$M_A = \left|\overline{F}\right| \cdot k = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\bar{r}_p\right| \cdot \sin j \; = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\bar{r}_p\right| \cdot \frac{\left|\bar{r}_p x \overline{F}\right|}{\left|\bar{r}_p\right| \cdot \left|\overline{F}\right|} = \left|\bar{r}_p x \overline{F}\right| ,$$

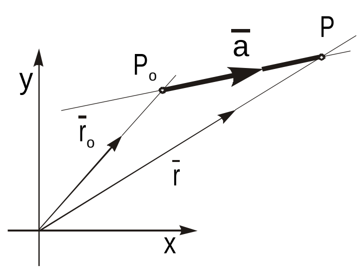
$$\overline{M}_A = \bar{r}_p x \overline{F} = /\,2\bar{i} + 3{,}5\bar{j}\,/\, x \,/\,4\bar{i} + 3\bar{j}\,/ = 6\bar{k} - 14\bar{k} = -8\bar{k} \quad [kNm].$$

A vektorális szorzatot egy harmadrendű determináns kifejtéséből is meghatározhatjuk:

$$\bar{a} x \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot /\,a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\,/ - \bar{j}\,/\,a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x\,/ + \bar{k}\,/\,a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\,/ \,.$$

<u>Egyenes egyenlete</u>

A P_o ponton átmenő adott $\bar{a}$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletének vektorális alakja.
/9. ábra/



$$\bar{a} x \,/\, \bar{r} - \bar{r}_0 \,/ = \bar{0}$$

9.ábra

Ugyanennek az egyenes egyenletének Plücker-féle alakja.

$$\bar{a}x\bar{r} - \bar{a}x\bar{r}_0 = \bar{a}x\bar{r} + \bar{a}x/-\bar{r}_0/ = \bar{a}x\bar{r} + \bar{b} = \bar{0}$$

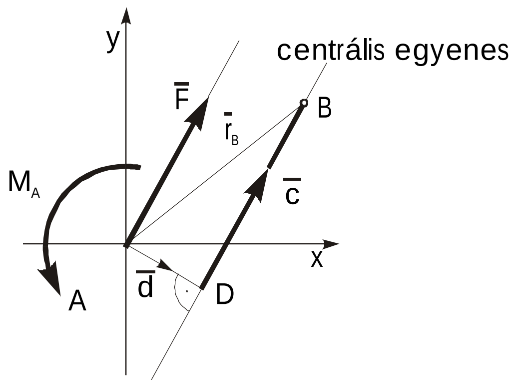
$$\bar{a} \quad és \quad \bar{b}; \quad \bar{b} \cdot \bar{a} = 0$$

Plücker koordináták.

A koordináta rendszer kezdő pontjában /A/ redukált $\bar{F}$ *és* $\bar{M}_A$ vektorok ismertek. Keressük azon pontok mértani helyét, ahová az $/\bar{F}, \ \bar{M}_A/$ vektorkettős nyomatéka zérus.

Egy tetszőleges pontra számított nyomaték:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \bar{F}x\bar{r}_{AB}$$



10.ábra

Itt most:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + /-\bar{r}_B / x\bar{F} / ,$$

$$\bar{M}_A - \bar{r}_B x\bar{F} = \bar{0} ,$$

$$\bar{F}x\bar{r} + \bar{M}_A = \bar{0} .$$

Az utóbbi egyenlet egy egyenes egyenlete a centrális egyenesé. A 10. ábrán körívdarabbal jelölt $\bar{M}_A$ az xy síkra merőleges velünk szemben mutató vektor. A következőkben határozzuk meg az egyenes D pontjához mutató vektort.

$$\bar{M}_A - \bar{r}_B x\bar{F} = \bar{M}_A - /\bar{d} + \bar{c}/x\bar{F} = \bar{0}$$

$$\bar{F}x\left|\bar{M}_A - \bar{d}x\bar{F} - \bar{c}x\bar{F}\right| = \bar{0}$$

$$\bar{F}x\bar{M}_A - \bar{F}x/\bar{d}x\bar{F}/ = \bar{0}$$

$$\bar{d} = \frac{\bar{F}x\bar{M}_A}{F^2}$$

<u>Vektorrendszer egyenértékűsége</u>

/V'/ vektorrendszert egyenértékűnek mondjuk a /V"/ vektorrendszerrel, ha a tér tetszőleges pontjára számított nyomatékuk megegyezik:

$$\bar{M}_A' = \bar{M}_A''$$

Mivel ezen értelmezés nem alkalmas az egyenértékűség eldöntésére, ezért az alábbi 3 feltétel egyikét használjuk.

1. $\overline{M}_{A'} = \overline{M}_{A'} + \overline{F}' x \overline{r}_{AB} = \overline{M}''_A + \overline{F}'' x \overline{r}_{AB} = \overline{M}''_B$,

$$\overline{M}'_A = \overline{M}''_A \qquad \text{és} \qquad \overline{F}' = \overline{F}''.$$

2. Ha A, B, C pont nem esik egy egyenesre:

$$\overline{M}'_A = \overline{M}''_A ,$$
$$\overline{M}'_B = \overline{M}''_B ,$$
$$\overline{M}'_C = \overline{M}''_C .$$

azaz a három pontra nézve a két vektor rendszer nyomatékvektorai megegyeznek.

3. Végül a /V'/ és /V"/ vektorrendszer egyenértékű, ha 6 db egymástól lineárisan független tengelyre számított nyomatékok megegyeznek.

$$m'_k = m''_k , \qquad / k = 1,2.....6 / .$$

Lineárisan független tengelyek a tetraéder oldallapjainak hat metszésvonala.

A tengelyre számított nyomatékot úgy számolhatjuk ki, hogy a tengely egy pontjára számított nyomatékot skalárisan szorozzuk a tengely irányát kijelölő egységvektorral.

$$m_a = \overline{M}_A \cdot \overline{e}_A .$$

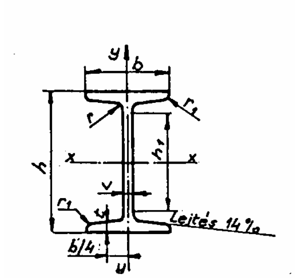
Egyensúlyi vektorrendszer esetében az egyik vektorrendszer $\overline{0}$ értékű.
Igy pl. a 2. feltétel alapján egyensúly van, ha teljesül:

$$\overline{M}_A = \overline{0} ,$$
$$\overline{M}_B = \overline{0} ,$$
$$\overline{M}_C = \overline{0} .$$

VARRATNÉLKÜLI ACÉLCSÖVEK (MSZ 99 szerint)
(Normál falvastagságú méretek jellemző adatai)

Külső átmérő d /mm/	Falvastag-ság s /mm/	Folyóméter-tömeg m / kg/m /	Felület A /cm²/	Tehetetlenségi nyomaték		Keresztmetszeti tényező		Inerciasugár	A félkeresztmetszet statikai nyomatéka M_{st} /cm³/
				tengelyre I /cm⁴/	pontra Ip /cm⁴/	tengelyre K /cm³/	pontra Kp /cm³/	$i=\sqrt{\frac{I}{A}}$	
10	1,6	0,331	0,422	0,039	0,077	0,077	0,154	3,02	0,057
12	1,6	0,410	0,523	0,072	0,145	0,121	0,241	3,72	0,087
14	1,9	0,542	0,690	0,131	0,262	0,187	0,375	4,36	0,135
16	1,8	0,630	0,803	0,206	0,411	0,257	0,514	5,06	0,182
17	1,8	0,675	0,860	0,252	0,503	0,296	0,592	5,41	0,209
18	2	0,789	1,005	0,327	0,653	0,363	0,726	5,7	0,257
20	2	0,888	1,131	0,464	0,927	0,464	0,927	6,40	0,325
22	2	0,986	1,257	0,635	1,269	0,577	1,154	7,11	0,401
25	2,3	1,288	1,640	1,067	2,135	0,854	1,708	8,07	0,595
27	2,3	1,401	1,785	1,373	2,746	1,017	2,034	8,77	0,704
28	2,3	1,458	1,857	1,545	3,091	1,104	2,208	9,12	0,762
30	2,6	1,757	2,232	2,119	4,238	1,413	2,826	9,73	0,979
32	2,6	1,885	2,401	2,615	5,230	1,634	3,269	10,44	1,127
34	2,6	2,013	2,565	3,183	6,365	1,872	3,744	11,14	1,285
38	2,6	2,270	2,892	4,554	9,I07	2,397	4,794	12,55	1,632
42	2,6	2,528	3,218	6,272	12,54	2,987	5,973	13,96	2,021
44,5	2,6	2,689	3,422	7,540	15,08	3,389	6,777	14,84	2,285
48	2,6	2,911	3,708	9,586	19,17	3,994	7,988	16,08	2,682
51	2,6	3,103	3,953	11,61	23,22	4,553	9,106	17,14	3,048
54	2,6	3,296	4,198	13,90	27,80	5,148	10,300	18,20	3,437
57	2,9	3,869	4,929	18,08	36,17	6,345	12,69	19,15	4,248
60	2,9	4,084	5,202	21,26	42,51	7,085	14,17	20,21	4,732
63, 5	2, 9	4,334	5,521	25, 40	50,80	8,000	16	21,45	5,329
70	2,9	4,799	6,113	34,47	68,94	9,848	19,70	23,75	6,533
76	2,9	5,228	6,660	44,55	89,11	11,72	23,45	25,87	7,752
83	3,2	6,298	8,022	63,96	127,9	15,41	30,82	28,24	10,19
89	3,2	6,771	8,626	79,48	159,0	17,86	35,72	30,36	11,78
95	3,6	8,115	10,34	108,1	216,2	22,76	45,52	32,34	15,04
102	3,6	8,736	11,13	134,9	269,7	26,45	52,89	34,81	17,44
108	3,6	9,269	11,81	161,1	322,1	29,83	59,65	36.93	19,63
114	3,6	9,801	12,49	190,4	380,9	33,41	66,82	39,05	21,95
127	4	12,13	15,46	292,6	595,2	46,08	92,16	43,51	30,27
133	4	12,73	16,21	337,5	675,1	50,76	101,5	45,63	33,29
140	4	13,42	17,09	395,5	790,9	56,50	113,0	48,10	37,0
152	4,5	16,37	20,85	567,6	1135	74,69	149,4	52,17	48,97
159	4,5	17,15	21,84	652,3	1305	82,05	164,1	54,65	53,72
168	4,5	18,14	23,11	773	1546	92,02	184	57,83	60,16
178	5	21,33	27,17	1017	2035	l114,3	228,6	61,19	74,84
194	5,6	26,02	33,15	1472	2944	151,7	303,5	66,64	99,41
219	6,3	33,05	42,10	2383	4766	217,6	435,2	75,23	142,6
245	6,3	37,09	47,24	3367	6734	274,9	549,7	84,42	179,5
273	7,1	46,56	59,31	5245	10450	384,3	768,6	94,04	251,1
299	8	57,41	73,14	7747	15495	518,2	1036	102,9	338,8
324	8	62,34	79,42	9919	19839	612,3	1225	111,8	399,5
356	8	68,66	87,46	13247	26494	744,2	1488	123,1	484,5
368	8	71,03	90,48	14665	29323	797	1594	127,3	518,5
406	9	88,12	112,2	22165	44251	1090	2180	140,4	709,4
419	l0	100,8	128,5	26884	53767	1283	2566	144,6	836,6

TÁBLÁZATOK



I szelvény

MSZ 325

A = a keresztmetszet területe
m = a folyómétertömeg
I =a másodrendű nyomaték

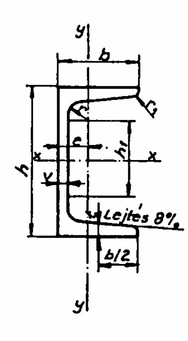
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ a tehetetlenségi sugár

K = a keresztmetszeti tényszó
M_{st} = a félkeresztmetszet statikai nyomatéka az x-x tengelyre

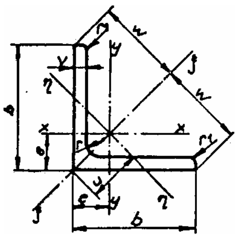
Szelvény mérte	h_1 mm	b mm	v=r mm	t mm	r_1 mm	A cm^2	m kg /m	I_x cm^4	K_x cm^3	i_x mm	I_y cm^4	K_y cm^3	i_y mm	M_{st} cm^3
80	59	42	3,9	5,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,3	32,0	6,29	3,00	9,1	11,4
l00	76	50	4,5	6,8	2,7	10,6	8,32	171	34,2	40,1	12,2	4,88	10,7	19,9
120	92	58	5,1	7,7	3,1	14,2	11,2	328	54,7	48,1	21,5	7,41	12,3	31,8
140	109	66	5,7	8,6	3,4	18,3	14,4	573	81,9	56,1	35,2	10,7	14,0	47,7
160	126	74	6,3	9,5	3,8	22,8	17,9	935	117	64,0	54,7	148	15,5	68,0
180	142	82	6,9	10,4	4,1	27,9	21,9	450	161	72	81,3	19,8	17,1	93,4
200	159	90	7,5	11,3	4,5	33,5	26,3	2140	214	80	117	26,0	18,7	125,0
220	176	98	8,1	12,2	4,9	39,6	31,1	3060	278	88	162	33,1	20,2	162,0
240	192	106	8,7	13,1	5,2	46,1	36,2	4250	354	95,9	221	41,7	22,0	206,0
260	209	113	9,4	14,1	5,6	53,4	41,9	5740	442	104,0	288	51,0	23,2	257,0
280	225	119	10,1	15,2	6,1	61,1	48,0	7590	542	111,0	364	61,2	24,5	316,0
300	242	125	10,8	16,2	6,5	69,1	54,2	9800	653	119,0	451	72,2	25,6	381,0
320	258	131	11,5	17,3	6,9	77,8	61,1	12510	782	127,0	555	84,T	26,7	457,0
340	274	137	12,2	18,3	T,3	86,8	68,l	15700	923	135,0	674	98,4	28,0	540,0
360	290	143	13,0	19,5	T,B	97,1	76,2	19610	1090	142,0	818	114,0	29,0	638,0
380	307	149	13,7	20,5	8,2	107,0	84,0	24010	1260	150,0	975	131,0	30,2	741,0
400	323	155	14,4	21,6	8,6	118,0	92,6	29210	1460	157,0	1160	149,0	31,3	857,0

U-szelvény

MSZ 326



h	b	h_1	t=r	r_1	v	e	A	m	I_x	K_x	i_x	I_y	K_y	i_y	M_{st}
a szelvény mérete	mm	mm	mm	mm	mm	cm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	mm	cm^4	cm^3	mm	cm^3
50	38	22	7,0	3,5	5,0	1,37	7,1	5,6	26	10,6	19,2	9,1	3,75	11,3	-
65	42	35	7,5	4,0	5,5	1,42	9,0	7,1	58	17,7	25,2	14,1	5,07	12,5	-
80	45	48	8,0	4,0	6,0	1,45	11,0	8,6	106	26,5	31,0	19,4	6,36	13,3	15,9
100	50	66	8,5	4,5	6,0	1,55	13,5	10,6	206	41,2	39,1	29,3	8,49	14,7	24,5
120	55	84	9,0	4,5	7,0	1,60	17,0	13,4	364	60,7	46,2	43,2	11,10	15,9	36,3
140	60	100	10,0	5,0	7,0	1,75	20,4	16,0	605	86,4	54,5	62,7	14,80	17,5	51,4
160	65	117	10,5	5,5	7,5	1,84	24,0	18,8	925	116,0	62,1	85,3	18,30	18,9	68,8
180	7O	136	11,0	5,5	8,0	1,92	28,0	22,0	1350	150,0	69,5	114,0	22,40	20,2	89,6
200	75	154	11,5	6,0	8,5	2,01	32,2	25,3	1910	191,0	77,0	146,0	27,00	21,4	114,0
220	80	170	12,5	6,5	9,0	2,14	37,4	29,4	2690	245,0	84,8	197,0	33,60	23,0	146,0
240	85	188	13,0	6,5	9,5	2,23	42,3	33,2	3600	300,0	92,2	248,0	39,60	24,2	179,0
260	90	204	14,0	7,0	10,0	2,36	48,3	37,9	4820	371,0	99,9	317,0	47,70	25,6	221,0
280	95	220	15,0	7,5	10,0	2,53	53,3	41,8	6280	448,0	109,0	399,0	57,20	27,4	266,0
300	100	236	16,0	8,0	10,0	2,70	58,8	46,2	8030	535,0	117,0	495,0	67,80	29,0	316,0



Egyenlőszárú L- szelvény

MSZ 328

A = a keresztmetszet területe
m = a folyómétertömeg
I =a másodrendű nyomaték

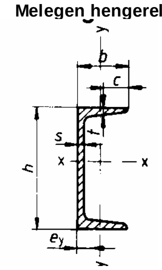
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$ a tehetetlenségi sugár

K = a keresztmetszeti tényszó

a szerelvény	b	v	r	r_1	e	w	u	A	m	$I_x=I_y$	$K_x=K_y$	$i_x=i_y$	I_s	i_s	I_η	i_η
mérete	mm	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	mm	cm^4	mm	cm^4	mm
40x40x4	40	4	6	3	1,12	2,83	1,58	3,08	2,42	4,48	1,56	12,1	2,09	15,2	1,86	7,8
4ox40x5	40	5	6	3	1,16	2,83	1,64	3,79	2,97	5,43	1,91	12,0	8,64	15,1	2,22	7,7
40x40x6	40	6	6	3	1,20	2,83	l,70	4,48	3,52	6,33	2,26	11,9	9,98	14,9	2,67	7,7
45x45x5	45	5	7	3,5	1,28	3,18	1,61	4,30	3,38	7,83	2,43	13,5	12,4	17,0	3,25	8,7
45z45x7	45	7	7	3,5	1,36	3,18	1,92	5,86	4,60	10,4	3,31	13,3	16,4	16,7	4,39	8,7
50x50x5	50	5	7	3,5	1,4	3,54	1,98	4,80	3,77	11,0	3,05	15,1	17,4	19,0	4,59	9,8
50x50x6	50	6	7	3,5	1,45	3,54	2,04	5,69	4,47	12,8	3,61	15,0	20,4	18,9	5,24	9,6
50x50x7	50	7	7	3,5	1,49	3,54	2,11	6,56	5,15	14,6	4,15	14,9	23,1	18,8	6,02	9,6
50x50x9	50	9	8	3,5	1,56	3,54	2,21	8,24	6,46	17,9	5,20	14,7	28,l	18,5	7,67	9,7
55x55x6	55	6	8	4,0	1,56	3,89	2,21	6,31	4,95	1?,3	4,40	16,6	27,4	20,8	7,24	10,7
55x55x8	55	8	8	4,0	1,64	3,89	2,32	8,23	6,46	22,1	5,72	16,4	34,8	20,6	9,35	10,7
55x55x10	55	10	8	4,0	1,72	3,89	2,43	10,1	7,90	26,3	6,97	16,2	41,4	20,2	11,3	10,6
60x60x6	60	6	8	4,0	1,69	4,24	2,39	6,91	5,42	22,8	5,29	18,2	36,1	22,9	9,43	11,7
60x60x8	60	8	8	4,0	1,97	4,24	2,50	9,03	7,09	29,1	6,88	18,0	46,1	22,6	12,1	11,6
60x60x10	60	10	8	4,0	1,85	4,24	2,62	11,1	8,69	34,9	8,41	17,8	55,1	22,3	14,6	11,5
65x65x7	65	7	9	4,5	1,85	4,60	2,62	8,7	6,83	33,4	7,18	19,6	53,0	24,7	13,8	12,6
65x65x9	65	9	9	4,5	1,93	4,60	2,73	11,0	8,62	41,3	9,04	19,4	65,4	24,4	17,2	12,5
65x65x11	65	11	9	4,5	2,0	4,60	2,83	13,2	10,3	48,8	10,8	19,1	76,8	24,2	20,7	12,5
70x70x7	70	7	9	4,5	1,97	4,95	2,79	9,4	7,38	42,4	8,43	21,2	67,1	26,7	17,6	13,7
70x70x9	7O	9	9	4,5	2,05	4,95	2,90	11,9	8,34	52,6	10,6	21,0	83,1	26,4	22,0	13,6
70x70x11	70	11	9	4,5	2,13	4,95	3,01	14,3	11,2	61,8	12,7	20,8	97,6	26,1	26,0	13,5
75x75x7	75	7	l0	5,0	2,09	5,30	2,95	10,1	7,94	52,4	9,67	22,8	83,6	28,8	21,1	14,5
75x75x8	75	8	l0	5,0	2,13	5.30	3,01	11,5	9,03	58,9	11,0	22,6	93,3	28,5	24,4	14,6
75x75x10	75	10	l0	5,0	2,21	5,30	3,12	14,1	11,1	71,4	13,5	22,5	113	28,3	29,8	14,5
75x75x12	75	12	l0	5,0	2,29	5,30	3,24	16,7	13,1	82,4	15,8	22,2	130	27,9	34,7	14,4
80x80x8	80	8	l0	5,0	2,26	5,66	3,24	12,3	9,66	72,3	12,6	24,2	115	30,6	29,6	15,5
80x80x10	80	10	l0	5,0	2,34	5,66	3,31	15,1	11,9	87,5	15,5	24,1	139	30,3	35,9	15,4
80x80x12	80	12	l0	5,0	2,41	5,66	3,41	17,9	14,1	102,0	18,2	23,9	161	30,0	43,0	15,3
80x80x14	80	14	l0	5,0	2,48	5,66	3,51	20,6	16,1	115,0	20,8	23,6	181	29,6	48,6	15,4
90x90x9	90	9	11	5,5	2,54	6,36	3,59	15,5	12,2	116,0	18,0	27,4	184	34,5	47,8	17,6
90x90x11	90	11	11	5,5	2,62	6,36	3,70	18,7	14,7	138,0	21,6	27,2	218	34,1	57,1	17,5
90x90x13	90	13	11	5,5	2,70	6,36	3,81	21,8	17,l	158,0	25,1	26,9	250	33,9	65,9	17,4
90x90x16	90	16	11	5,5	2,81	6,36	3,97	26,4	20,7	186,0	30,1	26,6	294	93,4	79,1	17,3
100x100x10	100	10	12	6,0	2,82	7,07	3,99	19,2	15,1	177,0	24,7	30,4	280	38,2	73,3	19,5
100x100x12	100	12	12	6,0	2,90	7,07	4,10	22,7	17,8	200	29,2	30,2	328	38,0	86,2	19,5
100x100x14	100	14	12	6,0	2,98	7,07	4,21	26,2	20,6	235	33,5	30,0	372	37,7	98,3	19,4
100x100x20	100	20	12	6,0	3,20	7,07	4,54	36.2	28,4	311	45,8	29,3	488	36,7	134	19,3
120x120x11	120	11	13	6,5	3,36	8,49	4,75	25,4	19,9	341	39,5	36,6	541	46,2	140	23,5
120x120x13	120	13	13	6,5	3,44	8,49	4,86	29,7	23,3	394	46,0	36,4	625	45,9	162	23,4
120x120x15	120	15	13	6,5	3,51	8,49	4,94	33,9	26,6	446	52,5	36,3	705	45,6	186	23,4
120x120x20	120	20	13	6,5	3,70	8,49	5,24	44,2	34,7	562	67,7	35,?	887	44,8	236	23,1
140x140x13	140	13	15	7,5	3,92	9,90	5,54	35,0	27,5	638	63,3	42,7	1010	53,8	262	27,4
140x140x15	140	15	15	7,5	4,0	9,90	5,66	40,0	31,4	723	72,3	42,5	1150	53,6	298	27,9
140x140x17	140	17	15	7,5	4,08	9,90	5,77	45,0	35,3	805	81,2	42,3	1280	53,3	334	27,2
160x160x15	160	15	17	8,5	4,49	11,3	6,35	46,1	36,2	1100	95,6	48,8	1750	61,5	453	31,4
160x160x17	160	17	17	8,5	4,57	11,3	6,46	51,8	40,7	1230	108,0	48,6	1950	61,3	506	31,3
160x160x19	160	19	17	8,5	4,65	11,3	6,58	57,5	45,1	1350	118,0	48,4	2140	61,0	558	31,2
180x180x16	180	16	18	9,0	5,02	12,7	7,11	55,4	43,5	1680	l30,0	55,1	2690	69,6	679	35,0
180x180x18	180	18	18	9,0	5,10	12,7	7,22	61,9	48,6	1870	145,0	54,9	2970	79,3	757	34,9
180x180x20	180	20	18	9,0	5,18	12,7	7,33	68,4	53,7	2040	160,0	54,7	3260	69,0	830	34,9
200x200x16	200	16	18	9,0	5,52	14,1	7,80	61,8	48,5	2340	162,0	61,5	3740	77,8	943	39,1
200x200x18	200	18	18	9,0	5,60	14,1	7,92	69,1	54,3	2600	181,0	61,3	4150	77,5	1050	39,0
200x200x20	200	20	18	9,0	5,68	14,1	8,04	76,4	59,9	2850	199,0	61,i	4540	77,2	1160	38,9

Idomacélok, előgyártmányok

Melegen hengerelt U acél **DIN 1026 (MSZ 336)**



80 mm magasság alatt rúdacél

Egy *h* = 50 mm magasságú és b = 38 mm övszélességű, S 235 JRG1 acélból melegen hengerelt U acél jelölése:

U acél DIN 1026-U 50 x 38-S 235 JRG1 (acél az MSZ EN 10 025 szerint)

Szállítási hosszak: 3 m…6 m.

80 mm magasságtól idomacél
Egy *h* = 300 mm magasságú, S 235 JRG1 acélból melegen hengerelt U acél jelölése

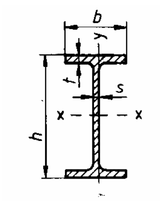
Az övek belső felületének lejtése 8 %

U acél DIN 1026-U 300-S 235 JRG

Szállítási hosszak: 4 m…18 m.

Jel					**Kereszt-metszet,**	**Hajlítási tengely:**				A tengely	Méterenkénti súly,
					x-x *S,*	**y-y**		**y-y**		távolsága, e_y,	F_G’ *
	h, mm	*b*, mm	*s*, mm	*t*, mm	mm²	I_x $\cdot 10^4$ mm⁴	W_x $\cdot 10^3$ mm³	I_y $\cdot 10^4$ mm⁴	W_y $\cdot 10^3$ mm³	**mm**	N/m
0 x 15	30	15	4	I 4.5	221	2,53	1,69	0.38	0,39	5.2	17,1
30 x 33	30	33	5	7	544	6.39	4,26	5.33	2,68	13,1	41,9
40 x 20	40	20	5	5.5	366	7.58	3.79	1,14	0,86	6,7	27,0
40 x 35	40	35	5	7	621	14.1	7,05	6,68	3,08	13.3	47.8
50 x 25	50	25	5	6	492	16,8	6,73	2,49	1,48	8.1	42.4
50x38	50	38	5	7	712	26,4	10,6	9,12	3,75	13.7	54,8
60x30	60	30	6	6	646	31,6	10,5	4,51	2,16	9,1	49,7
65 x 42	65	42	5,5	7,5	903	57,5	17,7	14.1	5,07	14,2	69,5
80	80	' 45	6	8	1100	106	26.5	19,4	6,36	14,5	84.7
100	100	50	6	8,5	1350	206	41,2	29,3	8,49	15,5	104,0
120	120	55	7	9	1700	364	60.7	43,2	11,1	16,0	131.4
140	140	60	7	10	2040	605	86,4	62,7	14.8	17,5	157.0
160	160	65	7.5	10,5	2400	925	116	85,3	18,3	18,4	184,4
180	180	70	8	11	2800	1350	150	114	22,4	19,2	215,7
200	200	75	8,5	11,5	3220	1910	191	148	27,0	20,1	248,1
220	220	80	9	12,5	3740	2690	245	197	33,6	21,4	288,3
240	240	85	9,5	13	4230	3600	300	248	39,6	22,3	325.6
260	260	90	10	14	4830	4820	371	317	47,7	23,6	371,7
280	280	95	10	15	5330	6280	448	399	57,2	25.3	410.0
300	300	100	10	16	5880	8030	535	495	67.8	27.0	453.1
320	320	100	14	17,5	7580	10870	679	597	80,6	26,0	583,5
350	350	100	14	16	7730	12840	734	570	75,0	24,0	594,3
380	380	102	13,5	16	8040	15760	829	615	78,7	23,8	613,9
400	400	110	14	18	9150	20350	1020	846	102	26,5	704,1

Idomacélok, előgyártmányok



Melegen hengerelt I tartó (keskeny I tartók) **DIN 1025 (MSZ EN 10 024)**

Egy h = 100 mm magasságú, I sorozatú, S 235 JRG1 acélból melegen hengerelt, keskeny I tartó jelölése:

I tartó MSZ EN 10 024-100-S 235 JRG1

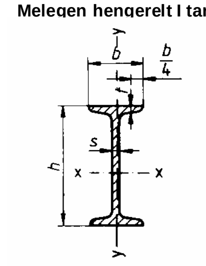
Anyag: acél az MSZ EN 10 025 szerint.

Szállítási hosszak: 6 m...16 m.

Az övek belső felületének lejtése ... 14%.

Jel					**Kereszt-**	**Hajlítási tengely:**				Méterenkénti
	h,	*b,*	*s,*	*t,*	**metszet,**	**x-x**		**y-y**		súly,
I	mm	mm	mm	mm	***S,*** mm²	I_x $\cdot 10^4$ mm⁴	W_x $\cdot 10^3$ mm³	I_y $\cdot 10^4$ mm⁴	W_y $\cdot 10^3$ mm³	F_G' N/m
80	80	42	3,9	5,9	757	77,8	19,5	6,29	3,00	58.3
100	100	50	4,5	6,8	1060	171	34,2	12.2	4.88	81 .6
120	120	58	5,1	7,7	1420	328	54,7	21,5	7,41	109,8
140	140	66	5,7	8,6	1820	573	81,9	35,2	10,7	141,2
160	160	74	6,3	9,5	2280	935	117	54,7	14,8	175,5
180	180	82	6,9	10,4	2790	1450	161	81,3	19,8	214,8
200	200	90	7,5	11,3	3340	2140	214	117	26,0	257,9
220	220	98	8,1	12,2	3950	3060	278	162	33,1	304,9
240	240	106	8,7	13,1	4610	4250	354	221	41,7	355,0
260	260	113	9,4	14,1	5330	5740	442	288	51,0	410,9
280	280	119	10,1	15,2	6100	7590	542	364	61,2	470,7
300	300	125	10,8	16,2	6900	9800	653	451	72,2	531,5

Melegen hengerelt I tartó (középszéles I tartó) IPE-sorozat **DIN 1025 (MSZ EN 10 034)**

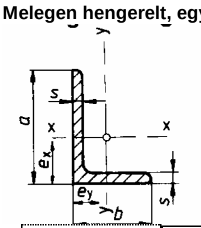


Egy h = 300 mm magasságú, IPE sorozatú, S 355 JO acélból melegen hengerelt középszéles I tartó jelölése:

IPE tartó MSZ EN 10 034-300-S 355 JO

Anyag és szállítási hosszak: mint az MSZ EN 10 024 szerinti I tartóknál.

Jel					**Kereszt-**	**Hajlítási tengely:**				Méterenkénti
	h,	*b,*	*s,*	*t,*	**metszet,**	**x-x**		**y-y**		súly,
IPE	mm	mm	mm	mm	***S,*** mm²	I_x $\cdot 10^4$ mm⁴	W_x $\cdot 10^3$ mm³	I_x $\cdot 10^4$ mm⁴	W_x $\cdot 10^3$ mm³	F_G' N/m
80	80	46	3,8	5,2	764	80,1	20,0	8,49	3.,69	59
100	100	55	4,1	5,7	1030	171	34,2	15,9	5,79	79
120	120	64	4,4	6,3	1320	318	53,0	27,7	8,65	102
140	140	73	4,7	6,9	1640	541	77,3	44,9	12,3	126
160	160	82	5,0	7,4	2010	869	109	68,3	16,7	155
180	180	91	5,3	8,0	2390	1320	146	101	22,2	184
200	200	100	5,6	8,5	2850	1940	194	142	28,5	220
220	220	110	5,9	9,2	3340	2770	252	205	37,3	257
240	240	120	6,2	9,8	3910	3890	324	284	47,3	301
270	270	135	6,6	10,2	4590	5790	429	420	62,2	353
300	300	150	7,1	10,7	5380	8360	557	604	80,5	414
330	330	160	7,5	11,5	6260	11770	713	788	98,5	482
360	360	170	8,0	12,7	7270	16270	904	1040	123	560
400	400	180	8,6	13,5	8450	23130	1160	1320	146	651
450	450	190	9,4	14,6	9880	33740	1500	1680	176	761



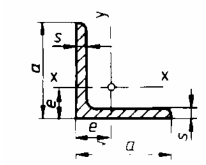
Egy a = 80 mm, b = 40 mm szárhosszúságú és b = 6 mm szárvastagságú. S 235 JO acélból melegen hengerelt egyenlőtlen szárú szögacél jelölése:

Szögacél DIN 1029-80 x **40** x 6-S 235 JO Anyag: acél az MSZ EN 10 025 szerint.
A "szög" elnevezés helyett az "L" rövidítés is használható.

Jel L		a, mm	b, mm	s mm	Kereszt-metszet, S, mm^2	yx mm	e_y mm	Hajlítási tengely: x-x I_x $\cdot 10^4$ mm^4	x-x W_x $\cdot 10^3$ mm^3	y-y I_y $\cdot 10^4$ mm^4	y-y W_y $\cdot 10^3$ mm^3	Méterenkénti súly, F_G' N/m
30 x 20 x	3	30	20	3	142	9,9	5,0	1,25	0,62	0,44	0,29	10,9
	4			4	185	10,3	5,4	1,59	0,81	0,55	0,38	14,2
40 x 20 x	3	40	20	3	172	14,3	4,4	2,79	1,08	0,47	0,30	13,2
	4			4	225	14,7	4,8	3,59	1,42	0,60	0,39	17,4
45 x 30 x	4	45	30	4	287	14,8	7,4	5,78	1,91	2,05	0,91	22,1
	5			5	353	15,2	7,8	6,99	2,35	2,47	1,11	27,2
50 x 40 x	4	50	40	4	346	15,2	10,3	8,54	2,47	4,86	1,64	26,6
	5			5	427	15,6	10,7	10,4	3,02	5,89	2,01	32,9
60 x 40 x	5	60	40	5	479	19,6	9,7	17,2	4,25	6,11	2,02	36,9
	6			6	568	20,0	10,1	20,1	5,03	7,12	2,38	43,7
75 x 50 x	7	75	50	7	830	24,8	12,5	46,4	9,24	16,5	4,39	63,8
	9			9	1050	25,6	13,2	57,4	11,6	20,2	5,49	80,7
80 x 40 x	6	80	40	6	689	28,5	8,8	44,9	8,73	7,59	2,44	53,1
	8			8	901	29,4	9,5	57,6	11,4	9,68	3,18	69,3
90 x 60 x	6	90	60	8	869	28,9	14,1	71,7	11,7	25,8	5,61	66,9
	8			B	1140	29,7	14,9	92,5	15,4	33,0	7,31	87,9
100 x 50 x	8	100	50	8	1150	35,9	11,3	116	18,0	19,5	5,04	88,2
	10			10	1410	36,7	12,0	141	22,2	23,4	6,17	108,9
120 x 80 x	10	120	80	10	1910	39,2	19,5	276	34,1	98,1	16,2	147,1
	12			12	2270	40,0	20,3	323	40,4	114	19,1	174,6
150 x 75 x	9	150	75	9	1950	52,8	15,7	455	46,8	78,3	13,2	150,0
	11			11	2360	53,7	16,5	545	56,6	93,0	15,9	182,4
180 x 90 x	10	180	90	10	2620	62,8	18,5	880	75,1	151	21,2	202,1
	12			12	3120	63,7	19,3	1040	89,3	177	25,1	240,3
200 x 100x	10	200	100	10	2920	69,3	20,1	1220	93,2	210	26,3	225,6
	12			12	3480	70,3	21,0	1440	111	247	31,3	267,8

Melegen hengerelt, egyenlő szárú szögacél **DIN 1028 (MSZ 328)**

Egy a = 80 mm szárhosszúságú, s = 6 mm szárvastagságú, S 235 JO acélból melegen hengerelt, egyenlő



szárú szögacél jelölése:

Szögacél DIN 1028-80 x **6-S 235 JO** Anyag: acél az MSZ EN 10 025 szerint.

Megjegyzés: x-x = *y-y* $e_x = e_y$

$I_x = I_y$ Szállítási hosszak: 6 m ... 12 m.

$W_x = W_y$

A piros színű méretek előnyben részesítendők.

Jel L		*a,* mm	*s,* mm	**Kereszt-metszet, *S,*** mm^2	**Hajlítási tengely: x-x=y-y** *e,* mm	*I* $\cdot 10^4$ mm^4	*W* $\cdot 10^3$ mm^3	Méteren-kénti súly, F_G' N/m	**Jel** L		*a,* mm	*s,* mm	**Kereszt-metszet, *S,*** mm^2	**Hajlítási tengely: x-x=y-y** *e,* mm	*I* $\cdot 10^4$ mm^4	*W* $\cdot 10^3$ mm^3	Méteren-kénti súly, F_G' N/m
20x	3	20	3	112	6.0	0.39	0,28	6.8	60x	5	60	5	582	16,4	19,4	4,45	44.8
	4		4	145	6,4	0,48	0,35	11,2		6		6	691	16,9	22,8	5,29	53,2
25x	**3**	25	3	142	7,3	0,79	0,45	11,0		8		8	903	17,7	29,1	6,88	69,5
	4		4	185	7,6	1,01	0,58	14,2		10		10	1110	18,5	34,9	8,41	85,2
	5		5	226	8,0	1,18	0,69	17,4	80x	7	80	7	1080	22,1	64,2	11,1	83,3
30x	3	30	3	174	8,4	1,41	0,65	13,3		8		8	1230	22,6	72,3	12,6	94,7
	4		4	227	8,9	1,81	0,86	17,5		10		10	1510	23,4	87,5	15,5	116,7
	5		5	278	9,2	2,16	1,04	21,4		12		12	1790	24,1	102	18,2	138,3
35x	3	35	**3**	204	9,6	2,9	0,90	15,7	90x	8	90	8	1390	25,0	104	16,1	106,9
	4		4	267	10,0	2,96	1,18	20,1		9		9	1550	25,4	116	18,0	119,6
	5		5	328	10,4	3,56	1,45	25,2		11		11	1870	26,2	138	21,6	144,2
	6		6	387	10,8	4,14	1,71	29,8		13		13	2180	27,0	158	25,1	167,7
40x	3	40	3	235	10,7	3,45	1,18	18,0	100x	8	100	8	1550	27,4	145	19,9	119,6
	4		4	308	11,2	4,48	1,56	23,7		10		10	1920	28,2	177	24,7	148,1
	5		5	379	11,6	5,43	1,91	29,1		12		12	2270	29,0	207	29,2	174,6
	6		6	448	12,0	6,33	2,26	34,5		14		14	2620	29,8	235	33,5	202,0
45x	4	45	4	349	12,3	6,43	1,97	26,9	120x	11	120	11	2540	33,6	341	39,5	195,2
	5		5	430	12,8	7,83	2,43	33,1		13		13	2970	34,4	394	46,0	228,5
	6		6	509	13,2	9,16	2,88	39,2		15		15	3390	35,1	446	52,5	260,9
	7		7	586	13,6	10,4	3,31	45,1	180x	16	180	16	5540	50,2	1680	130	426,6
50x	4	50	4	389	13,6	8,97	2,46	30,0		18		18	6190	51,0	1870	145	476,6
	5		5	480	14,0	11,0	3,05	37,0		20		20	6840	51,8	2040	160	526,6
	6		43,9						200x	16	200	16	6180	55,2	2340	162	484,4
	7		7	656	14,9	14,6	4,15	50.5		18		18	6910	56,0	2600	181	532,5
	8		8	741	15.2	16.3	4,68	57.1		20		20	7640	56.8	2850	199	587,4

Az „w” tényező értékei 37-es acélminőségre

Karcsú-sági tényező	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Karcsú-sági tényező**
0	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,12	1,13	1,13	0
10	1,14	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,18	10
20	1,18	1,19	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	20
30	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28	1,28	30
40	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	40
50	1,37	1,38	1,39	1,40	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	50
60	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,55	1,56	60
70	1,57	1,58	1,60	1,61	1,63	1,64	1,65	1,66	1,68	1,69	70
80	1,71	1,73	1,75	1,77	1,78	1,79	1,81	1,83	1,85	1,87	80
90	1,88	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,04	2,05	90
100	2,06	2,08	2,11	2,13	2,16	2,19	2,21	2,24	2,26	2,28	100
110	2,31	2,34	2,36	2,39	2,41	2,44	2,47	2,50	2,52	2,55	110
120	2,58	2,60	2,62	2,65	2,68	2,71	2,74	2,77	2,80	2,84	120
130	2,87	2,91	2,95	2,99	3,03	3,06	3,10	3,14	3,18	3,22	130
140	3,27	3,31	3,35	3,39	3,43	3,47	3,51	3,55	3,59	3,64	140
150	3,69	3,73	3,77	3,82	3,86	3,91	3,95	3,99	4,04	4,09	150
160	4,13	4,18	4,23	4,29	4,33	4,39	4,44	4,49	4,54	4,59	160
170	4,65	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,06	5,12	170
180	5,18	5,23	5,28	5,33	5,38	5,43	5,48	5,54	5,59	5,65	180
190	5,71	5,76	5,82	5,88	5,95	6,02	6,08	6,14	6,21	6,27	190
200	6,33	6,39	6,45	6,50	6,56	6,62	6,68	6,75	6,81	6,87	200
210	6,94	7,00	7,06	7,13	7,19	7,25	7,31	7,38	7,45	7,51	210
220	7,58	7,65	7,72	7,80	7,87	7,94	8,00	8,07	8,14	8,20	220
230	8,26	8,33	8,41	8,48	8,55	8,62	8,67	8,73	8,80	8,86	230
240	8,93	9,01	9,10	9,18	9,27	9,35	9,42	9,50	9,57	9,64	240
250	9,7										